Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 3–5. November 2014

a) *Richtig oder falsch:* Die Menge aller streng monoton wachsender Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge der Menge alle stetiger Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch
$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_n = x_{n-1} + 3n - 1 \quad \text{für } n \geq 2\,.$$
Zeigen Sie: $x_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$!

c) Stellen Sie die reelle Zahl $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ möglichst einfach dar!

d) Zeigen Sie: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist $z^2 + \overline{z}^2$ reell.

e) Ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \dfrac{3n+2}{2n+3}$ beschränkt? monoton? konvergent?

f) Ist die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = (-1)^n \dfrac{3n+2}{2n+3}$ beschränkt? monoton? konvergent?

g) Finden Sie eine konvergente, aber nicht monotone Teilfolge von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$!

h) Bestimmen Sie, sofern es existiert, das Infimum sowie das Supremum der Menge
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 5 < 0 \right\} !$$

i) Drücken Sie die Funktion $f: \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{1}{2}\log x} \end{cases}$ einfacher aus! ($\mathbb{R}_{>0} \underset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$)

j) Finden Sie für die Funktion $f(x) = (100x)^2$ für $x = 0$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ ist, falls $|y - x| < \delta$!

k) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{e^x}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

l) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$ auf dem Intervall $[-10, 10]$!

m) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \exp\left(\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\right)$!

n) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \log(n+1) - \log n$ ist eine Nullfolge.

o) Zeigen Sie: Es gibt eine reelle Zahl $x \in [-1, 1]$ mit der Eigenschaft $e^x = x^2$

p) Zeigen Sie: Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ konvergiert für alle $n \geq 2$!

q) *Richtig oder falsch:* Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ konvergiert.

r) *Richtig oder falsch:* Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konvergiert.

s) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert!

t) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2-\frac{1}{k}}\right)^k$ konvergiert!