Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27.–29. Oktober 2014

a) Richtig oder falsch: Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{falls } x\le 0\\ x+1 & \text{falls } x>0\end{cases}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Lösung: Die beiden Funktionen $f_1(x)=x-1$ und $f_2(x)=x+1$ sind als Polynomfunktionen stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Damit ist die Funktion auf jeden Fall stetig für $x\neq 0$, denn in der Umgebung eines solchen Punkts stimmt sie mit f_1 oder f_2 überein. Da aber $f_1(0)=-1$ verschieden ist von $f_2(0)=+1$, ist sie im Punkt $x=0$ nicht stetig und damit auch nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

b) In welchen Punkten $x\in\mathbb{R}$ ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\begin{cases} x & \text{für } x<-1\\ x^2-2 & \text{für } -1\le x\le 1\\ x+1 & \text{für } x>\ \ 1\end{cases}$ stetig?

Lösung: Für $x\neq\pm1$ stimmt die Funktion in der Umgebung von x mit einer der drei Polynomfunktionen $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2-2$ oder $f_3(x)=x+1$ überein, ist dort also stetig.

An der Stelle $x=-1$ ist $f_1(x)=-1$ und $f(x)=f_2(x)=(-1)^2-2=-1$; da beide Werte übereinstimmen, ist die Funktion stetig bei $x=-1$.

Auch bei $x=1$ ist $f(x)=f_2(x)=-1$, aber $f_3(x)=2$. Daher ist die Funktion bei $x=1$ nicht stetig.

c) Richtig oder falsch: Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{falls } x\le -1\\ 2(x+1) & \text{falls } -1<x<1\\ 3x+1 & \text{falls } x\ge 1\end{cases}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Lösung: Die drei Funktionen $f_1(x)=x+1$, $f_2(x)=2(x+1)$ und $f_3(x)=3x+1$ sind linear, also stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Für $x\neq\pm1$ ist f daher stetig, denn dann stimmt f in einer Umgebung von x mit einer dieser drei Funktionen überein. Für $x=\pm1$ müssen wir die Werte der dort „zusammenstoßenden" Funktionen vergleichen: $f_1(-1)=0=f_2(-1)$ und $f_2(1)=4=f_3(1)$. Somit ist die Funktion auch dort stetig; die Behauptung ist also richtig.

d) Nach §32a EStG berechnet sich die Einkommensteuer aus dem zu versteuernden Einkommen x wie folgt: Bis 8 354 Euro, müssen keine Steuern bezahlt werden. Liegt x darüber, aber nicht über 13 469 Euro, beträgt die Steuer $(974{,}58\cdot y+1\,400)\cdot y$, wobei y (abgesehen von Rundungsvorschriften) ein Zehntausendstel des 8 354 Euro übersteigenden Teils des Einkommens ist. Danach, bis 52 881 Euro, ist die Steuer $(228{,}74\cdot z+2\,397)\cdot z+971$, wobei z ein Zehntausendstel des 13 469 Euro übersteigenden Teils des Einkommens ist. Danach gilt bis 250 730 Euro die Formel $0{,}42\cdot x-8\,239$, dann schließlich $0{,}45\cdot x-15\,761$. Ist die zu zahlende Einkommensteuer eine stetige Funktion von x, wenn wir (im Gegensatz zum EStG) das Einkommen als kontinuierliche Größe, d.h. als beliebige reelle Zahl betrachten? Wenn nicht, wo ist sie unstetig?

Lösung: Da wir die Rundungsvorschriften des EStG ignorieren, sind

$$y=\frac{x-8\,354}{10\,000}\quad\text{und}\quad z=\frac{x-13\,469}{10\,000}$$

stetige (sogar lineare) Funktionen von x; die beiden quadratischen Polynome, in die y und z eingesetzt werden, sind (als Polynome) stetige Funktionen von y *bzw.* z, also auch von x. Die konstante Funktion null und die beiden linearen Funktionen sind ebenfalls stetig; jede der fünf Komponenten ist also als Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Die einzigen Kandidaten für Unstetigkeiten sind daher die Stellen, an denen zwischen zwei Funktionen gewechselt wird; dort müssen wir die Werte der linksseitigen und der rechtsseitigen Funktion vergleichen.

Für $x = 8\,354$ ist $y = 0$, also verschwindet das quadratische Polynom in y genau wie die Konstante Null im Intervall davor; hier ist die Funktion also stetig.

Für $x = 13\,469$ ist $y = 0{,}5115$ und $z = 0$. Das Polynom in y hat den Wert $971{,}0815582$, das in z natürlich den Wert 971. Somit ist die Funktion hier nicht stetig. (Für Besteuerungszwecke ist der Sprung um rund acht Cent irrelevant, da tatsächlich stets auf volle Euro abgerundet wird.)

Für $x = 52\,881$ ist $z = 3{,}9412$; das Polynom in z nimmt dort den Wert $13\,971{,}087\,96$ an, während $0{,}42 \cdot x - 8\,239 = 13\,971{,}02$ ist. Wieder haben wir mathematisch eine Unstetigkeit.

Für $x = 250\,730$ schließlich ist $0{,}42 \cdot x - 8\,239 = 97\,067{,}60$, und $0,45x - 15\,761 = 97\,067{,}50$, so daß die Funktion auch hier unstetig ist.

e) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist auch die Funktion $g\colon D \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x^2)$ dort, wo sie definiert ist, stetig.

Lösung: *Richtig,* denn g ist die Hintereinanderausführung von f mit der auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Funktion $x \mapsto x^2$.

f) Für welche $x \in D$ ist g nicht definiert?

Lösung: Für alle $x \in D$, für die x^2 nicht in D liegt.

g) Welche Bedingungen muß D erfüllen, damit aus der Stetigkeit von g die von f folgt?

Lösung: Da $x^2 \geq 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$, kann die Stetigkeit von g nichts aussagen über die Stetigkeit von f bei negativen Argumenten. Somit darf D jedenfalls keine negativen Zahlen enthalten. Das allein genügt aber noch nicht, denn auch eine positive Zahl muß nicht notwendigerweise Quadrat eines Elements *aus* D sein. Wir müssen daher fordern, daß jedes Element von D sich als Quadrat eines Elements von D darstellen läßt, d.h.

$$D \subseteq \left\{x^2 \mid x \in D\right\}.$$

Diese Bedingung erfüllen beispielsweise die nichtnegativen sowie auch die positiven reellen Zahlen, die Intervalle $[0, 1]$ und $(0, 1)$, aber auch jedes Intervall $[1, a]$ mit $a > 1$. Wenn f auf einer solchen Menge D definiert ist, können wir f schreiben als die Hintereinanderausführung von g und der Wurzelfunktion, die in diesem Fall wohldefiniert und stetig ist und auf D Werte aus D liefert: Für $x \in D$ ist $f(x) = g\big(\sqrt{x}\big)$ mit $\sqrt{x} \in D$.

h) Finden Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ für die reellwertige Funktion $f(x) = \dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+1)(x+3)(x+5)}$, und untersuchen Sie, wo f stetig ist!

Lösung: Da Zähler und Nenner Polynomfunktionen und damit stetig sind, müssen wir nur vermeiden, daß der Nenner verschwindet. Die Funktion ist daher auf $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -3, -5\}$ definiert und stetig.

i) Finden Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ für die reellwertige Funktion $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$, und untersuchen Sie, wo f stetig ist!

Lösung: Da die Wurzel nur für nichtnegative Zahlen definiert ist, müssen wir sicherstellen, daß $x^3 - x \geq 0$ ist. $x^3 - x = (x+1)x(x-1)$ ist negativ genau dann, wenn entweder genau einer der drei Faktoren negativ ist oder alle drei. Letzteres ist der Fall für $x < -1$, ersteres für $0 < x < 1$. Der größtmögliche Definitionsbereich ist somit

$$D = [-1, 0] \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}.$$

Dort ist die Funktion in jedem Punkt stetig, denn sie ist die Hintereinanderausführung der auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Polynomfunktion $x^3 - x$ und der für nichtnegative Argumente stetigen Quadratwurzel.

j) Definieren Sie eine stetige Funktion $f(x) = x^x$, und finden Sie deren größtmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$

Lösung: Da wir a^x für $a > 0$ als $e^{x \log a}$ definiert haben, bietet sich die Definition $x^x \underset{\text{def}}{=} e^{x \log x}$ an. Da der Logarithmus nur für positive Werte definiert ist, sind die positiven reellen Zahlen der größtmögliche Definitionsbereich; dort ist die Funktion stetig, denn der Logarithmus und die Identität sind stetig, also auch $x \log x$, und die Hintereinanderausführung mit der auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Exponentialfunktion bleibt stetig.

k) *Richtig oder falsch:* Jede streng monoton wachsende Funktion ist stetig.

Lösung: *Falsch;* $f(x) = x + [x]$ ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion, die streng monoton wächst, da x streng monoton wächst und $[x]$ immerhin noch monoton wächst, aber natürlich ist f an keinem Punkt $x \in \mathbb{Z}$ stetig, da die Funktion dort um eins nach oben springt.

l) Worauf bildet die Funktion $f(x) = x^2 - 4$ das Intervall $[-3, 3]$ ab? Worauf wird $(-3, 3)$ abgebildet?

Lösung: Da $f(-x) = f(x)$ ist, genügt es, die $x \geq 0$ zu betrachten; für diese ist f monoton wachsend, und stetig ist f als Polynomfunktion ohnehin. Daher wird $[-3, 3]$ auf $[f(0), f(3)] = [-4, 5]$ abgebildet. Das offene Intervall $(-3, 3)$ wird abgebildet auf das halboffene Intervall $[-4, 5)$.

m) Bestimmen Sie das Maximum M und das Minimum m der Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$ auf dem Intervall $[-10, 10]$!

Lösung: $f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$ kann offensichtlich keine kleineren Werte als zwei annehmen; wegen $f(-1) = 2$ wird dieser Wert angenommen und ist somit das Minimum m. Da der Graph von f eine Parabel ist, wächst die Funktion monoton, wenn man sich vom Punkt $x = -1$ entfernt; das Maximum wird daher an einem der beiden Intervallränder angenommen. Da $f(-10) = 9^2 + 2$ und $f(10) = 11^2 + 2$, ist das Maximum somit $M = 11^2 + 2 = 123$.

n) Bildet f das Intervall $[-10, 10]$ injektiv ab auf $[m, M]$?

Lösung: Natürlich nicht, den die Funktion ist nicht monoton im Intervall: Vor $x = -1$ ist sie monoton fallend, danach steigt sie monoton an. Wir können hier sogar konkret sehen, wie die Injektivität verletzt ist: Wegen

$$(x + 1)^2 = (-x - 1)^2 = \big((-2 - x) + 1\big)^2$$

ist $f(x) = f(-2 - x)$, also beispielsweise $f(1) = f(-3) = 6$.

o) Zeigen Sie, daß die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{11} + 3x^7 + 5x + 2 \end{cases}$ eine stetige Umkehrfunktion hat!

Lösung: Für jedes ungerade n ist die Funktion $x \mapsto x^n$ streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$, genauso natürlich auch alle ihre positiven Vielfachen. $f(x)$ ist daher eine Summe aus streng monoton wachsenden Funktionen und einer Konstanten, also streng monoton wachsend. Daher hat für jedes Intervall $[a, b]$ die Einschränkung von f zu einer Funktion

$[a, b] \to [f(a), f(b)]$ eine stetige Umkehrfunktion $[f(a), f(b)] \to [a, b]$. Diese Funktionen lassen sich zusammensetzen zu einer Umkehrfunktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

p) Was ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$?

Lösung: Nach der Summenformel für die geometrische Reihe ist für $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad \text{also} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Gefragt war aber nur nach der Summe ab $n = 1$, daher müssen wir den Summanden $(1/3)^0 = 1$ subtrahieren und erhalten $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

q) Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$!

Lösung: Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Alternativ kann man $\binom{n}{k}$ interpretieren als die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge; summiert man von $k = 0$ bis n, erhält man alle Teilmengen, und das sind 2^n.

r) Zeigen Sie: $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$!

Lösung: $\displaystyle\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$

Alternativ: $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Ordnet man jeder Menge ihr Komplement zu, erhält man eine Bijektion von der Menge aller k-elementigen Teilmengen auf die aller $(n-k)$-elementigen, also stimmen die Anzahlen überein, d.h. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.