

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27.–29. Oktober 2014

- a) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{falls } x \leq 0 \\ x+1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$ ist stetig auf \mathbb{R} .
- b) In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$ stetig?
- c) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \leq -1 \\ 2(x+1) & \text{falls } -1 < x < 1 \\ 3x+1 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$ ist stetig auf \mathbb{R} .
- d) Nach §32a EStG berechnet sich die Einkommensteuer aus dem zu versteuernden Einkommen x wie folgt: Bis 8354 Euro, müssen keine Steuern bezahlt werden. Liegt x darüber, aber nicht über 13469 Euro, beträgt die Steuer $(974,58 \cdot y + 1400) \cdot y$, wobei y (abgesehen von Rundungsvorschriften) ein Zehntausendstel des 8354 Euro übersteigenden Teils des Einkommens ist. Danach, bis 52881 Euro, ist die Steuer $(228,74 \cdot z + 2397) \cdot z + 971$, wobei z ein Zehntausendstel des 13469 Euro übersteigenden Teils des Einkommens ist. Danach gilt bis 250730 Euro die Formel $0,42 \cdot x - 8239$, dann schließlich $0,45 \cdot x - 15761$. Ist die zu zahlende Einkommensteuer eine stetige Funktion von x , wenn wir (im Gegensatz zum EStG) das Einkommen als kontinuierliche Größe, d.h. als beliebige reelle Zahl betrachten? Wenn nicht, wo ist sie unstetig?
- e) *Richtig oder falsch:* Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist auch die Funktion $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x^2)$ dort, wo sie definiert ist, stetig.
- f) Für welche $x \in D$ ist g nicht definiert?
- g) Welche Bedingungen muß D erfüllen, damit aus der Stetigkeit von g die von f folgt?
- h) Finden Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ für die reellwertige Funktion $f(x) = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+1)(x+3)(x+5)}$, und untersuchen Sie, wo f stetig ist!
- i) Finden Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ für die reellwertige Funktion $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$, und untersuchen Sie, wo f stetig ist!
- j) Definieren Sie eine stetige Funktion $f(x) = x^x$, und finden Sie deren größtmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$.
- k) *Richtig oder falsch:* Jede streng monoton wachsende Funktion ist stetig.
- l) Worauf bildet die Funktion $f(x) = x^2 - 4$ das Intervall $[-3, 3]$ ab? Worauf wird $(-3, -3)$ abgebildet?
- m) Bestimmen Sie das Maximum M und das Minimum m der Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$ auf dem Intervall $[-10, 10]$!
- n) Bildet f das Intervall $[-10, 10]$ injektiv ab auf $[m, M]$?
- o) Zeigen Sie, daß die Funktion $f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{11} + 3x^7 + 5x + 2 \end{cases}$ eine stetige Umkehrfunktion hat!
- p) Was ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$?
- q) Zeigen Sie: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$!
- r) Zeigen Sie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$!