Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20.–22. Oktober 2014

a) Am ersten Januar 2015 werden 10000 Euro angelegt zu einem Zinssatz von 1%. Welches Kapital ist am Jahresende vorhanden, wenn nur einmal jährlich, einmal monatlich *bzw.* kontinuierlich verzinst wird?

Lösung: Bei einmal jährlicher Verzinsung kommt 1% dazu, am Jahresende sind also 10100 Euro vorhanden. Bei monatlicher Verzinsung wird das Kapital mit $(1 + 0{,}01/12)^{12} \approx 1{,}010045957$ multipliziert und damit zu 10100 Euro und 46 Cent. Bei kontinuierlicher Verzinsung ist der Multiplikator $e^{0.01} \approx 1{,}010050167$, am Jahresende gibt es also 10100 Euro und 50 Cent.

b) Konvergieren die Folgen $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$? Wenn ja, wohin?

Lösung: Da $e > 1$ ist, divergiert die Folge der Zahlen e^n bestimmt gegen ∞. Daraus folgt dann, daß die Folge der e^{-n} eine Nullfolge ist, denn $e^{-n} = 1/e^n$.

c) Zeigen Sie, daß die Exponentialfunktion eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ definiert!

Lösung: Angenommen, $e^x = e^y$, aber $x \neq y$. Dann ist entweder $x < y$ oder $y < x$. Im ersten Fall ist $e^x < e^y$, im zweiten $e^y < e^x$, beides im Widerspruch zur vorausgesetzten Gleichheit. Also muß $x = y$ sein, womit die Injektivität bewiesen wäre.

d) Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\log e^x = x$!

Lösung: $u = \log e^x$ ist die eindeutig bestimmt reelle Zahl u, für die $e^u = e^x$ ist, also x.

e) Zeigen Sie, daß der Logarithmus eine bijektive Abbildung von der Menge aller positiver reeller Zahlen auf die Menge aller reeller Zahlen definiert!

Lösung: Ist y irgendeine reelle Zahl, so ist $x = e^y$ positiv, da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt. Außerdem ist $\log x = \log e^y = y$; die Zahl $x = e^y$. Damit ist die Surjektivität gezeigt. Zum Nachweis der Injektivität betrachten wir irgendeine reelle Zahl z mit $y = \log z$. Dann ist $x = e^y = e^{\log z} = z$; das Urbild ist also eindeutig bestimmt.

f) Der *binäre Logarithmus* $y = \operatorname{lb} x$ einer positiven reellen Zahl x ist jene reelle Zahl, für die $2^y = x$ ist. Er spielt in der Informationstheorie eine große Rolle. Zeigen Sie: Die Anzahl der Bits (= **bi**nary digi**ts**) zur Darstellung einer natürlichen Zahl n im Zweiersystem ist die kleinste natürliche Zahl r, die größer ist als $\operatorname{lb} n$.

Lösung: Eine natürliche Zahl n braucht für ihre Darstellung im Zweiersystem genau dann r Ziffern, wenn $2^{r-1} \le n < 2^r$ ist, denn 2^{r-1} ist binär eine Eins gefolgt von $r-1$ Nullen, und $2^r - 1$ wird binär durch r Einsen dargestellt. Wegen $2^x = e^{x\log 2}$ gilt also $e^{(r-1)\log 2} \le e^{\log n} < e^{r\log 2}$. Auf Grund der Monotonie der Exponentialfunktion ist dann auch $(r-1)\log 2 \le \log n < r\log 2$, denn wäre $(r-1)\log 2 > \log n$ oder $\log n \ge r\log 2$, so wäre $e^{(r-1)\log 2} > e^{\log n}$ beziehungsweise $e^{\log n} \ge e^{r\log 2}$. Da $\log 2 > 0$ ist, können wir dividieren und erhalten die Ungleichung

$$r - 1 \le \frac{\log n}{\log 2} = \operatorname{lb} n < r\,,$$

die r als die kleinste natürliche Zahl echt größer $\operatorname{lb} n$ charakterisiert.

g) $a, b > 1$ seien zwei reelle Zahlen. Zeigen Sie: Es gibt eine reelle Zahl c, so daß

$$\log_b x = c \log_a x$$

für alle $x > 0$!

Lösung: Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, ist für eine positive reelle Zahl x

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \quad \text{und} \quad \log_b x = \frac{\log x}{\log b},$$

also ist $\log_b x = \frac{\log a}{\log b} \log_a x$.

h) Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, daß für jede *ganze* Zahl n und jede positive reelle Zahl x gilt: $\log(x^n) = n \log x$.

Lösung: Für $n = 1$ ist natürlich $\log x^1 = 1 \cdot \log x$. Angenommen, die Behauptung ist bereits bewiesen für eine feste natürliche Zahl n. Dann ist

$$\log x^{n+1} = \log(x^n \cdot x) = \log x^n + \log x\,.$$

Nach Induktionsannahme ist $\log x^n = n \log x$, also

$$\log x^{n+1} = n \log x + \log x = (n+1) \log x\,,$$

wie im Induktionsschluß zu zeigen ist. Somit ist nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $\log x^n = n \log x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen war das aber für alle $n \in \mathbb{Z}$. Für $n = 0$ ist $\log x^0 = \log 1 = 0$. Für negative ganze Zahlen $-n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist $x^{-n} \cdot x^n = 1$, also $\log x^{-n} + \log x^n = \log 1 = 0$. Wie bereits gezeigt, ist $\log x^n = n \log x$, also $\log x^{-n} = -n \log x$, wie behauptet.

i) Zeigen Sie: Für jede reelle Zahl $x > 1$ ist $\log x \le x - 1$!

Lösung: Nach einer der beiden definierenden Eigenschaften der Exponentialfunktion ist $e^y \ge 1 + y$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Damit ist auch $e^{x-1} \ge x$ für alle $x \in \mathbb{R}$: Man setze einfach $y = x - 1$. Wenn die in der Aufgabe aufgestellte Behauptung falsch wäre, könnten wir aus der Ungleichung $\log x > x - 1$ folgern, daß $x = e^{\log x} > e^{x-1}$ wäre, im Widerspruch zur gerade gezeigten Ungleichung. Somit ist die Behauptung richtig.

j) Zeigen Sie: Die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{\ge 0} \underset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\} \to \mathbb{R} \\ \hfill x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

ist stetig!

Lösung: Sei zunächst $x > 0$, und $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben. Für $y \ge 0$ ist nach der dritten binomischen Formel

$$(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x}) = y - x\,, \text{ also ist } \quad \left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| = \frac{|y - x|}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} < \frac{|y - x|}{\sqrt{x}}\,.$$

Setzen wir daher $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{x}$, so ist

$$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| = \frac{|y - x|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{|y - x|}{\sqrt{x}} < \frac{\delta}{\sqrt{x}} = \varepsilon\,.$$

Bleibt noch der Fall $x = 0$; hier müssen wir zeigen, daß es zu jeden $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß aus $y < \delta$ folgt, daß $\sqrt{y} < \varepsilon$ ist. Hier können wir offensichtlich $\delta = \varepsilon^2$ setzen.

k) Zeigen Sie: Konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen x_n gegen $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Folge $\left(\sqrt{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{x}$!

Lösung: Dies folgt sofort aus der in der vorigen Aufgabe bewiesenen Stetigkeit der Wurzelfunktion und dem entsprechenden Satz aus der Vorlesung.

l) Für die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ gebe es eine reelle Zahl c, so daß $|f(x) - f(y)| \le c \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in D$. Zeigen Sie, daß f stetig auf D ist.

Lösung: Ist $c = 0$, so muß f konstant sein, ist also stetig. Andernfalls ist, zumindest wenn D mehr als ein Element enthält, $c > 0$. Wir betrachten ein beliebiges Element $x \in D$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Mit $\delta = \varepsilon/c$ gilt dann für jedes $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \le c\,|x - y| < c\delta = \varepsilon\,;$$

die Funktion ist also stetig in x. Da $x \in D$ beliebig gewählt war, ist sie stetig auf ganz D.

m) Zeigen Sie, daß es für die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ kein solches $c \in \mathbb{R}$ gibt!

Lösung: Für $x = 0$ ist $|x - y| = y$ und $|f(x) - f(y)| = \sqrt{y}$. Für die Zahl c müßte daher $\sqrt{y} \le cy$ sein für alle $y \ge 0$. Damit müßte insbesondere $c \ge 1/\sqrt{y}$ sein für alle $y > 0$, und diese Ungleichung erfüllt keine reelle Zahl c.

n) Die GAUSS-Klammer $[x]$ einer reellen Zahl x bezeichnet die größte ganze Zahl $z \le x$. An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = [x]$ stetig, an welchen nicht?

Lösung: Ist x eine ganze Zahl, so ist $f(x) = [x] = x$. Für eine reelle Zahl y mit $x-1 < y < x$ ist $f(y) = x - 1$, für y mit $x \le y < x + 1$ aber ist $f(y) = x$. Damit kann die Funktion an diesen Stellen nicht stetig sein: Sonst müßte es beispielsweise für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $\delta > 0$ geben, so daß $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$ wäre für alle y mit $|x - y| < \delta$. Ist aber η irgendeine positive reelle Zahl, die echt kleiner als δ ist, so erfüllt $y = x - \eta$ zwar sicherlich die letztere Ungleichung, aber $f(y) \le x - 1$ hat größeren Abstand von $f(x) = x$ als $\frac{1}{2}$. Also ist f für jedes $x \in \mathbb{Z}$ unstetig. Ist $x \ne \mathbb{Z}$ und $\delta = \min(x - [x], [x] + 1 - x)$ der Abstand zur nächsten ganzen Zahl, so ist $f(y) = f(x)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - x| < \delta$, für jedes $\varepsilon > 0$ ist also mit diesem δ die Forderung aus der Definition der Stetigkeit erfüllt.

o) *Richtig oder falsch:* Ist für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = |f(x)|$ stetig, so auch f.

Lösung: *Falsch:* Definieren wir etwa

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

so ist f in jedem Punkt unstetig, aber $g(x) = |f(x)| = 1$ ist eine konstante Funktion und somit überall stetig.

p) Finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; die für jedes positive $x \in \mathbb{R}$ sowie für jedes negative $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, im Punkt $x = 0$ aber unstetig.

Lösung: Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \ne 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ist stetig in jedem Punkt $x \ne 0$: Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ können wir einfach, unabhängig von ε, das gesuchte δ als $|x|/2$ definieren. Für ein y mit $|y - x| < \delta$ ist dann sicherlich $y \ne 0$, also $f(x) = f(y) = 0$; die Funktion ist also stetig in x. Für den Punkt $x = 0$ kann es aber offensichtlich zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ kein $\delta > 0$ geben, so daß

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - 1| < \varepsilon$$

ist, denn für jedes $y \ne 0$ ist $f(y) = 0$ und damit $|f(y) - f(x)| = 1$.

q) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$h\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \le a \\ g(x) & \text{falls } x > a \end{cases} \end{cases}$$

genau dann stetig auf $\mathbb{R}$ ist, wenn $f(a) = g(a)$ ist.

Lösung: Offensichtlich ist h in jedem Punkt $x \neq a$ stetig; wir müssen das δ, das wegen der Stetigkeit von f *bzw.* g existiert, nur gegebenenfalls so verkleinern, daß jedes y mit $|x - y| < \delta$ auf derselben Seite von a liegt wie x.
Bleibt der Punkt $x = a$. Nach dem Folgenkriterium ist h stetig in a, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert a gilt:

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(a)\,.$$

Wir teilen die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf in zwei Teilfolgen $(x_{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$, wobei die erste Teilfolge alle $x_n \le a$ enthalten soll und die zweite den Rest. Wegen der Stetigkeit von f konvergiert die erste Teilfolge, so sie unendlich viele Glieder enthält, gegen $f(a)$; die zweite entsprechend wegen der Stetigkeit von g gegen $g(a)$. Ist $f(a) = g(a)$, so konvergiert auch die Gesamtfolge gegen diesen Wert, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß $|f(a) - f(x_{\mu_n})| < \varepsilon$ ist für alle $n \ge n_1$; entsprechend gibt es auch ein $n_2 \in \mathbb{N}$, so daß $|f(a) - g(x_{\nu_n})| = |g(a) - g(x_{\nu_n})| < \varepsilon$ ist für $n \ge n_2$. Für $n \ge n_0 = \max\{\mu_{n_1}, \nu_{n_2}\}$ ist daher $|h(a) - h(x_n)| < \varepsilon$, denn jedes x_n kommt ja in einer der beiden Teilfolgen vor.
Ist $f(a) \neq g(a)$, so betrachten wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert a derart, daß es unendlich viele n gibt mit $x_n \le a$ und auch unendlich viele x_n mit $x_n > a$. Dann kann die Folge der $f(x_n)$ nicht gegen $f(a)$ konvergieren, denn für ein $\varepsilon < \frac{1}{2}\,|f(a) - g(a)|$ gibt es ein n_2, so daß für die Teilfolge der $x_n > a$ alle Funktionswerte einen kleineren Abstand als ε von $g(a)$ haben, und damit kann nach der Dreiecksungleichung keines einen Abstand kleiner ε von $f(a)$ haben.