Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20.–22. Oktober 2014

a) Am ersten Januar 2015 werden 10000 Euro angelegt zu einem Zinssatz von 1%. Welches Kapital ist am Jahresende vorhanden, wenn nur einmal jährlich, einmal monatlich *bzw.* kontinuierlich verzinst wird?

b) Konvergieren die Folgen $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$? Wenn ja, wohin?

c) Zeigen Sie, daß die Exponentialfunktion eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ definiert!

d) Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\log e^x = x$!

e) Zeigen Sie, daß der Logarithmus eine bijektive Abbildung von der Menge aller positiver reeller Zahlen auf die Menge aller reeller Zahlen definiert!

f) Der *binäre Logarithmus* $y = \operatorname{lb} x$ einer positiven reellen Zahl x ist jene reelle Zahl, für die $2^y = x$ ist. Er spielt in der Informationstheorie eine große Rolle. Zeigen Sie: Die Anzahl der Bits (= **b**inary dig**its**) zur Darstellung einer natürlichen Zahl n im Zweiersystem ist die kleinste natürliche Zahl r, die größer ist als $\operatorname{lb} n$.

g) $a, b > 1$ seien zwei reelle Zahlen. Zeigen Sie: Es gibt eine reelle Zahl c, so daß

$$\log_b x = c \log_a x$$

für alle $x > 0$!

h) Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, daß für jede *ganze* Zahl n und jede positive reelle Zahl x gilt: $\log(x^n) = n \log x$.

i) Zeigen Sie: Für jede reelle Zahl $x > 1$ ist $\log x \le x - 1$!

j) Zeigen Sie: Die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{\ge 0} \underset{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0 \right\} \to \mathbb{R} \\ \hfill x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

ist stetig!

k) Zeigen Sie: Konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen x_n gegen $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Folge $\left(\sqrt{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{x}$!

l) Für die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ gebe es eine reelle Zahl c, so daß $|f(x) - f(y)| \le c \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in D$. Zeigen Sie, daß f stetig auf D ist.

m) Zeigen Sie, daß es für die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ kein solches $c \in \mathbb{R}$ gibt!

n) Die Gauss-Klammer $[x]$ einer reellen Zahl x bezeichnet die größte ganze Zahl $z \le x$. An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = [x]$ stetig, an welchen nicht?

o) *Richtig oder falsch:* Ist für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = |f(x)|$ stetig, so auch f.

p) Finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; die für jedes positive $x \in \mathbb{R}$ sowie für jedes negative $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, im Punkt $x = 0$ aber unstetig.

q) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$h\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \le a \\ g(x) & \text{falls } x > a \end{cases} \end{cases}$$

genau dann stetig auf $\mathbb{R}$ ist, wenn $f(a) = g(a)$ ist.