Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13.–15. Oktober 2014

a) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind nach oben, welche nach unten beschränkt? Bestimmen Sie, sofern es existiert, auch Infimum und Supremum der Menge!

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}, \qquad B = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \qquad C = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}\right\},$$
$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 5\}, \quad E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 5\}, \quad F = (0, 1) \cup (2, 3) \cup (4, 5), \quad G = \mathbb{N}_0$$

Lösung: Die endliche Menge A ist natürlich sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt; ihr kleinstes Element 2 ist gleichzeitig Infimum, ihr größtes Element 19 Supremum.

Da $0 < 1/n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, liegen alle Elemente von B zwischen null und eins. Für $n = 1$ erhalten wir die Null; damit kann es keine größere untere Schranke geben, und die Null ist das Infimum. Auch die obere Schranke 1 ist optimal, denn zwar gibt es kein $n \in \mathbb{N}$, so daß $1 - 1/n = 1$ wäre, aber jede obere Schranke M muß großer oder gleich eins sein, denn für jede reelle Zahl $M < 1$ ist $1 - M > 0$, es gibt also eine natürliche Zahl M, so daß $1 - M > 1/n$ ist, d.h. $1 - 1/n > M$. Somit ist die Eins das Supremum von B.

Bei C kommen zu den Elementen von B noch die Zahlen $1 + 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ dazu; die größte unter diesen ist $2 = 1 + \frac{1}{1}$ das größte. Da alle Elemente von B kleiner eins sind, ist die Zwei somit eine obere Schranke und gleichzeitig das Supremum von C. Die Zahlen $1 + 1/n$ sind allesamt größer als eins; Infimum und insbesondere untere Schranke ist daher das Infimum von B, also die Null.

Für eine reelle Zahl x ist $x^2 < \sqrt{5}$ genau dann, wenn $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ ist. Das gilt insbesondere auch für rationale Zahlen; also sind $\pm\sqrt{5}$ obere und untere Schranken von D. Da wir D als Teilmenge von $\mathbb{R}$ betrachten, sind das auch Infimum und Supremum.

Die Relation $x^2 > \sqrt{5}$ gilt genau dann, wenn $x < -\sqrt{5}$ oder $x > \sqrt{5}$ ist. Da es sowohl beliebig kleine als auch beliebig große rationale Zahlen gibt, die eine dieser Ungleichungen erfüllen, ist E weder nach oben noch nach unten beschränkt; insbesondere existieren weder Infimum noch Supremum.

F dagegen ist beschränkt: Alle Elemente $x \in F$ erfüllen die Ungleichung $0 < x < 5$. Die Schranken 0 und 5 sind auch Infimum und Supremum, denn natürlich gibt es zu jedem $M > 0$ ein Element aus $(0, 1)$, das kleiner ist, z.B. $x = M/(M + 1)$. Entsprechend gibt es für jedes $M < 5$ ein Element aus $(4, 5)$, das größer ist.

$G = \mathbb{N}_0$ hat natürlich die Null als untere Grenze und damit, da $0 \in \mathbb{N}_0$ auch als Infimum. Obere Schranken gibt es nicht, denn für jede reelle Zahl M gibt es eine natürliche Zahl $n > M$.

b) Die quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ habe zwei reelle Lösungen. Zeigen Sie: Diese Lösungen sind Infimum und Supremum von $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q < 0\}$!

Lösung: Sind $a \leq b$ die beiden Nullstellen, so ist $x^2 + px + q = (x - a)(x - b)$; das ist negativ für $a < x < b$. Die angegebene Menge ist also gerade das offene Intervall (a, b), und dessen Infimum und Supremum sind natürlich a und b.

c) Sind sie auch Minimum und Maximum?

Lösung: Natürlich nicht, denn sie liegen ja nicht in A.

d) Sind sie auch Infimum und Supremum der Menge $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q \geq 0\}$?

Lösung: Schreiben wir wieder $x^2 + px + q = (x - a)(x - b)$ mit $a \leq b$, so sehen wir, daß dies positiv ist, falls entweder $x < a$ oder $x > b$ ist. Die Menge aller reeller Zahlen, die kleiner als a oder größer als b sind, ist weder nach oben noch nach unten beschränkt; es gibt also weder Infimum noch Supremum.

e) Was passiert, wenn die Gleichung nur eine reelle Lösung hat?

Lösung: Bezeichnet c die Nullstelle, ist $x^2 + px + q = (x - c)^2 \geq 0$ für alle x. Somit ist

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q < 0\} = \emptyset \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q \geq 0\} = \mathbb{R}\,.$$

Beide Mengen haben weder Infimum noch Supremum und haben im übrigen auch nichts mit c zu tun.

f) Richtig oder falsch: Konvergiert die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen gegen x.

Lösung: *Richtig,* denn für die Teilfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = x_{\nu_n}$ ist $\nu_n \geq n$ für alle n, da ν_1 als natürliche Zahl mindestens eins sein muß und die Folge der ν_n streng monoton wächst. Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so daß $|x - x_n| < \varepsilon$ ist für alle $n \geq n_0$; für $n \geq n_0$ ist auch $\nu_n \geq n \geq n_0$, also ist auch $|y_n - x| = |x_{\nu_n} - x| < \varepsilon$.

g) Richtig oder falsch: Die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn die drei Teilfolgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n = x_{2n}$, $v_n = x_{2n+1}$ und $w_n = x_{3n}$ konvergent sind.

Lösung: Wie wir gerade gesehen haben, müssen auch alle Teilfolgen einer konvergenten Folge konvergieren; wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergieren also auch die drei Teilfolgen. Problematischer ist die Umkehrung:

Wenn wir nur wüßten, daß die Folgen der u_n und der v_n konvergieren, könnten wir nicht ausschließen, daß beide gegen verschiedene Grenzwerte konvergieren und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ somit unbestimmt divergiert; schließlich haben die beiden Teilfolgen nichts miteinander zu tun. Bei der dritten Folge allerdings sind die Indizes die Dreierzahlen, und die sind abwechselnd gerade und ungerade. Das sollte einen Zusammenhang zwischen den drei Folgen herstellen. Seien u, v, w die Grenzwerte der drei Folgen. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen n_1, n_2 und n_3, so daß

$$\begin{aligned} |u - u_n| &< \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq n_1\,, \\ |v - v_n| &< \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq n_2 \quad \text{und} \\ |w - w_n| &< \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq n_3\,. \end{aligned}$$

Für $n_0 = \max(2n_1, 2n_2, 3n_3)$ ist daher

$$\begin{aligned} |u - x_n| &< \varepsilon/2 \quad \text{für alle geraden } n \geq n_0\,, \\ |v - x_n| &< \varepsilon/2 \quad \text{für alle ungeraden } n \geq n_0 \quad \text{und} \\ |w - x_n| &< \varepsilon/2 \quad \text{für alle durch drei teilbaren } n \geq n_0\,. \end{aligned}$$

Für eine durch sechs teilbare natürliche Zahl $n \geq n_0$ ist somit

$$|u - w| \leq |u - x_n| + |x_n - w| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

und für eine ungerade Dreierzahl $n \geq n_0$ haben wir die Abschätzung

$$|v - w| \leq |v - x_n| + |x_n - w| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Da wir diese Abschätzungen für jedes $\varepsilon > 0$ beweisen können, muß $u = w$ und $v = w$ sein, also $u = v = w$. Bezeichnen wir diesen gemeinsamen Wert als x, so ist $|x - x_n| < \varepsilon$ für jedes $n \geq n_0$, denn n muß entweder gerade oder ungerade sein (und ist eventuell zusätzlich auch noch durch drei teilbar).

h) *Richtig oder falsch:* Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Lösung: *Richtig:* Die minimalistische Lösung bestünde darin zu sagen, daß wir aus der Vorlesung wissen, daß jede konvergente Folge eine CAUCHY-Folge ist und beim Beweis des CAUCHYschen Konvergenzkriteriums gezeigt haben, daß jede CAUCHY-Folge beschränkt ist.
Ein direkter Beweis ist allerdings auch nicht viel aufwendiger: Konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x, so gibt es insbesondere für $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|x - x_n| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ ist daher

$$|x_n| = |x + (x_n - x)| \leq |x| + |x - x_n| < |x| + 1 .$$

Bezeichnet M das Maximum der n_0 Zahlen $|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|$ und $|x|+1$, ist daher $|x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

i) Finden Sie in der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-2)^n + (-1)^{n+1}/2n$ eine monoton wachsende und eine monoton fallende Teilfolge!

Lösung: Der erste Term $(-2)^n$ ist positiv und monoton wachsend, wenn wir uns auf gerade n beschränken, aber negativ und monoton fallend, wenn wir uns auf ungerade n beschränken. Der zweite Term ist negativ und monoton wachsend für gerade n, aber positiv und monoton fallend für ungerade n. Damit ist die Teilfolge der geraden Terme monoton wachsend, die der ungeraden monoton fallend.

j) Finden Sie in der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-2)^n + (-1)^n/2n$ eine monoton wachsende und eine monoton fallende Teilfolge!

Lösung: Wenn wir uns wieder zunächst auf die geraden Indizes beschränken, ist nun der erste Term monoton wachsend und positiv, der zweite positiv und monoton fallend. Da die Folge der $(-2)^{2n} = 4^n$ aber eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen ist, während der zweite Term stets einen Betrag von höchstens $1/2$ hat, bleibt die Folge trotzdem monoton wachsend. Aus dem gleichen Grund bleibt die Folge der ungeraden Terme monoton fallend.

k) *Richtig oder falsch:* Jede nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.

Lösung: *Falsch;* die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = -n$ ist offensichtlich nach oben beschränkt, hat aber keine konvergente Teilfolge.

l) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge, so auch $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung: *Richtig,* denn ist $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$, so ist auch $\big||x_n| - |x_m|\big| < \varepsilon$: Wenn wir in der verschärften Dreiecksungleichung

$$\big||x - y| - |y - z|\big| \leq |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

$x = x_n, y = 0$ und $z = x_m$ setzen, erhalten wir die Ungleichung $\big||x_n| - |x_m|\big| \leq |x_n - x_m|$.

m) *Richtig oder falsch:* Ist $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge, so auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung: Das ist natürlich falsch: Beispielsweise ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-1)^n$ sicherlich keine CAUCHY-Folge (sonst wäre sie schließlich konvergent), aber die Folge der Beträge ist die konstante Folge aus lauter Einsen, und die ist natürlich eine CAUCHY-Folge.

n) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{n(n+1)}$. Zeigen Sie: Das ist eine CAUCHY-Folge!

Lösung: Wir müssen zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Für $n > m$ ist

$$\begin{aligned} x_n - x_m &= \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=m+1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i+1} \\ &= \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=m+2}^{n+1} \frac{1}{i} = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m+1}\,. \end{aligned}$$

Ist n_0 größer als $1/\varepsilon$, ist dies für alle $n, m \geq n_0$ kleiner als ε.

o) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_n = x_{n-1} + \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$. Zeigen Sie: Das ist eine CAUCHY-Folge!

Lösung: Wieder müssen wir zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Für $n > m$ ist

$$x_n - x_m = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{(-1)^i}{i(i+1)}\,,$$

aber wenn wir das wie oben auflösen, erhalten wir nichts nützliches. Nach der Dreiecksungleichung ist aber

$$|x_n - x_m| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \left|\frac{(-1)^i}{i(i+1)}\right| = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}\,,$$

und wie wir oben nachgerechnet haben, wird das kleiner ε, sobald n, m über einer Schranke $n_0 \geq 1/\varepsilon$ liegen.

p) $A \subset \mathbb{R}$ sei eine nach oben beschränkte nichtleere Menge. und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei Q_n die Menge aller rationaler Zahlen der Form p/n mit $p \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, daß A eine obere Schranke aus Q_n hat!

Lösung: Ist M irgendeine obere Schranke, so gibt es eine natürliche Zahl $M^* \geq M$, die somit ebenfalls obere Schranke ist, und natürlich läßt sich M^* auch als Bruch $nM * /n$ darstellen.

q) Zeigen Sie, daß es unter den oberen Schranken aus Q_n stets ein kleinstes Element q_n gibt!

Lösung: M sei irgendeine obere Schranke aus Q_n und x sei ein Element von A. Die Zahlen $M - k/n$ für $k \in \mathbb{N}_0$ sind spätestens für $k > (M - x)n$ keine oberen Schranken für A mehr, für $k = 0$ aber haben wir die obere Schranke M. Daher gibt es unter den k, für die $M - k/r$ untere Schranke ist, ein maximales Element k_0, und $q_n = M - k_0/n$ ist die kleinste obere Schranke aus Q_n

r) Zeigen Sie, daß die Folge der q_n eine CAUCHY-Folge ist!

Lösung: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x_n \in A$, für das $q_n - x_n < 1/n$ ist, denn sonst wäre auch $q_n - 1/n$ eine obere Schranke. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $n_0 \in \mathbb{N}$ größer als $2/\varepsilon$. Für $n, m \geq n_0$ sei $x = \max(x_n, x_m)$; dann sind

$$|q_n - x| = q_n - x \leq q_n - x_n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$|q_m - x| < q_m - x \leq q_n - x_m < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$|q_m - q_n| \leq |q_m - x| + |x - q_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

s) Zeigen Sie, daß $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \sup A$ ist!

Lösung: Nach dem CAUCHYschen Konvergenzkriterium gibt es auf jeden Fall einen Grenzwert; dieser sei q. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in A$ ist $q_n \geq x$, also ist auch $q \geq x$, d.h. q ist eine obere Schranke. Um zu zeigen,d aß es sogar das Supremum ist, müssen wir zeigen, daß kein $q' < q$ obere Schranke ist.
Wir setzen $\varepsilon = q - q'$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|q - q_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wir wählen ein solches $n \geq n_0$, für das $1/n < \frac{1}{2}\varepsilon$ ist und betrachten das Element x_n aus der vorigen Aufgabe. Wegen

$$q - x_n = |q - x_n| \leq |q - q_n| + |q_n - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = q - q'$$

ist $x_n > q'$, also ist q' keine obere Schranke.

t) Zeigen Sie: Zu jeder irrationalen Zahl $x \in (0, 1)$ gibt es eine streng mononoton wachsende Folge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, so daß x Grenzwert der rekursiv durch $x_1 = 2^{-\nu_1}$ und $x_n = x_{n-1} + 2^{-\nu_n}$ definierten Folge ist!

Lösung: Für jedes $x > 0$ gibt es eine kleinste natürliche Zahl ν_1, so daß $x > 2^{-\nu_1}$ ist. Diese nehmen wir, setzen $x_1 = 2^{-\nu_1}$ und $y_1 = x - x_1$. Da ν_1 kleinstmöglich gewählt wurde, ist $y_1 < 2^{-\nu_1}$; sonst wäre schließlich $x > 2^{-\nu_1} + 2^{-\nu_1} = 2^{-(\nu_1-1}$. Außerdem ist $y_1 > 0$, da x sonst rational wäre.
Zur rekursiven Konstruktion der weiteren ν_n nehmen wir an, ν_n sei bereits konstruiert und damit auch reelle Zahlen $x_n = 2^{-\nu_n}$ und y_n mit $x = x_n + y_n$ und $0 < y_n < 2^{-\nu_n}$. Sei ν_{n+1} die kleinste natürliche Zahl mit $y > 2^{-\nu_{n+1}}$. Wir setzen $x_{n+1} = x_n + 2^{-\nu_{n+1}}$; wie oben folgt, daß $y_{n+1} = x - x_{n+1}$ positiv und kleiner als $2^{-\nu_{n+1}}$ ist. Die Folge der x_n konvergiert gegen x, da $y_n = x - x_n$ stets kleiner ist als $2^{-\nu_n}$ und die Folge der ν_n monoton wächst.

u) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge mit $x_n = 3 + (-1)^n + \frac{1}{n}$!

Lösung: Für gerade n ist $x_n = 4 + \frac{1}{n}$, für ungerade n ist es $2 + \frac{1}{n}$. Beides definiert konvergente Teilfolgen, und jedes x_n kommt in einer dieser beiden Teilfolgen vor. Soit sind 2 und 4 die beiden einzigen Häufungspunkte.