Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13.–15. Oktober 2014

a) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind nach oben, welche nach unten beschränkt? Bestimmen Sie, sofern es existiert, auch Infimum und Supremum der Menge!

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}, \qquad B = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \qquad C = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\},$$
$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 5\}, \quad E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 5\}, \quad F = (0,\,1) \cup (2,\,3) \cup (4,\,5), \quad G = \mathbb{N}_0$$

b) Die quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ habe zwei reelle Lösungen. Zeigen Sie: Diese Lösungen sind Infimum und Supremum von $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q < 0\}$!

c) Sind sie auch Minimum und Maximum?

d) Sind sie auch Infimum und Supremum der Menge $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q \geq 0\}$?

e) Was passiert, wenn die Gleichung nur eine reelle Lösung hat?

f) *Richtig oder falsch:* Konvergiert die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen gegen x.

g) *Richtig oder falsch:* Die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn die drei Teilfolgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n = x_{2n}$, $v_n = x_{2n+1}$ und $w_n = x_{3n}$ konvergent sind.

h) *Richtig oder falsch:* Jede konvergente Folge ist beschränkt.

i) Finden Sie in der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-2)^n + (-1)^{n+1}/2n$ eine monoton wachsende und eine monoton fallende Teilfolge!

j) Finden Sie in der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-2)^n + (-1)^n/2n$ eine monoton wachsende und eine monoton fallende Teilfolge!

k) *Richtig oder falsch:* Jede nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.

l) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so auch $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

m) *Richtig oder falsch:* Ist $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

n) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{n(n+1)}$. Zeigen Sie: Das ist eine Cauchy-Folge!

o) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_n = x_{n-1} + \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$. Zeigen Sie: Das ist eine Cauchy-Folge!

p) $A \subset \mathbb{R}$ sei eine nach oben beschränkte nichtleere Menge. und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei Q_n die Menge aller rationaler Zahlen der Form p/n mit $p \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, daß A eine obere Schranke aus Q_n hat!

q) Zeigen Sie, daß es unter den oberen Schranken aus Q_n stets ein kleinstes Element q_n gibt!

r) Zeigen Sie, daß die Folge der q_n eine Cauchy-Folge ist!

s) Zeigen Sie, daß $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \sup A$ ist!

t) Zeigen Sie: Zu jeder irrationalen Zahl $x \in (0,\,1)$ gibt es eine streng mononoton wachsende Folge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, so daß x Grenzwert der rekursiv durch $x_1 = 2^{-\nu_1}$ und $x_n = x_{n-1} + 2^{-\nu_n}$ definierten Folge ist!

u) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge mit $x_n = 3 + (-1)^n + \frac{1}{n}$!