

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 6.–8. Oktober 2014

a) *Richtig oder falsch:* Jede konvergente Folge komplexer Zahlen ist beschränkt.

**Lösung:** *Richtig*, denn konvergiert die Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a \in \mathbb{C}$ , so gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $|a - z_n| < 1$  ist für alle  $n \geq n_0$ . Für  $n \geq n_0$  ist daher nach der Dreiecksungleichung

$$|z_n| = |a + (z_n - a)| \leq |a| + |z_n - a| < |a| + 1.$$

Bezeichnet  $c$  das Maximum der Beträge  $|z_1|, \dots, |z_{n_0-1}|$ , so ist daher  $|z_n| \leq \max(c, |a|+1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

b) *Richtig oder falsch:* Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen konvergiert.

**Lösung:** *Falsch*; die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n = (-1)^n$  ist zwar beschränkt, aber nicht konvergent.

c) *Richtig oder falsch:* Jede periodische Folge reeller Zahlen ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.

**Lösung:** *Richtig*; sie nimmt nur endlich viele Werte an; der kleinste davon ist eine untere Schranke, der größte eine obere.

d) *Richtig oder falsch:* Jede monoton wachsende Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist nach unten beschränkt

**Lösung:** *Richtig*; da  $x_{n+1} \geq x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , folgt induktiv, daß  $x_n \geq x_1$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ ;  $x_1$  ist also eine untere Schranke.

e) *Richtig oder falsch:* Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen ist genau dann beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

**Lösung:** *Richtig*; ist  $M$  eine obere und  $N$  eine untere Schranke, so ist für alle positiven  $x_n$ , so es welche gibt, der Betrag kleiner oder gleich dem Betrag von  $M$ , und für alle negativen  $x_n$  ist der Betrag kleiner oder gleich dem Betrag von  $N$ . Bezeichnet  $S$  das Maximum der beiden Beträge, ist daher  $|x_n| \leq S$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , die Folge ist also beschränkt.

Ist umgekehrt  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge, so gibt es eine Schranke  $M \in \mathbb{R}$ , so daß  $|x_n| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Somit ist  $-M \leq x_n \leq M$ , d.h.  $M$  ist eine obere und  $-M$  eine untere Schranke.

f)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seien drei Folgen reeller Zahlen derart, daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $x_n \leq y_n \leq z_n$ . Zeigen Sie: Falls die Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beide konvergent sind und denselben Grenzwert  $x$  haben, so konvergiert auch  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$ !

**Lösung:** Wir müssen zeigen, daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so daß  $|x - y_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Dies läßt sich auch umschreiben in die Ungleichungskette

$$x - \varepsilon < y_n < x + \varepsilon.$$

Da die Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beide gegen  $x$  konvergieren, gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_1 \in \mathbb{N}$ , so daß  $|x - x_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_1$  sowie ein  $n_2 \in \mathbb{N}$ , so daß  $|x - z_n| < \varepsilon$

für alle  $n \geq n_2$ . Für  $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$  gelten beide Ungleichungen; wenn wir sie wie oben umschreiben, haben wir also die Ungleichungskette

$$x - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < x + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Damit ist gezeigt, daß auch die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$  konvergiert.

- g) Gilt auch die folgende Verallgemeinerung:  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seien drei Folgen reeller Zahlen derart, daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $x_n \leq y_n \leq z_n$ . Außerdem seien die Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beide konvergent. Dann ist auch  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ .

**Lösung:** Wenn die beiden Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  verschiedene Grenzwerte haben, spricht offenbar nichts dagegen, daß sich die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im Bereich zwischen diesen Grenzwerten hin- und herbewegt ohne gegen einen Punkt zu bieten; die Behauptung sollte also falsch sein. Dies können wir am einfachsten dadurch zeigen, daß wir ein Gegenbeispiel konstruieren: Sei etwa

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad y_n = \begin{cases} 1 & \text{für ungerade } n \\ 2 & \text{für gerade } n \end{cases} \quad \text{und} \quad z_n = 2 + \frac{1}{n}.$$

Offensichtlich ist  $x_n < y_n < z_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , die Folge der  $x_n$  konvergiert gegen eins und die der  $y_n$  gegen zwei, aber die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist unbestimmt divergent.

- h) Entscheiden Sie für jede der hier definierten reellen Zahlenfolgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und so weiter, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist! Was können Sie im konvergenten Fall über den Grenzwert sagen?

$$x_n = \sqrt{n}, \quad y_n = \frac{n-1}{n+1}, \quad z_n = \frac{3(n+2)}{(n+1)^2}, \quad u_n = 1 + (-1)^n, \quad v_n = (-1)^n(2n+1)$$

**Lösung:** Die Folge mit  $x_n = \sqrt{n}$  wächst offensichtlich unbegrenzt und divergiert daher bestimmt gegen  $\infty$ . Um das exakt zu beweisen, wählen wir eine reelle Zahl  $M$  und müssen zeigen, daß es dazu ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so daß  $\sqrt{n} > M$  ist für alle  $n \geq n_0$ . Definieren wir  $n_0$  als die kleinste natürliche Zahl größer  $M^2$ , gilt diese Ungleichung für alle  $n \geq n_0$ .

$y_n$  können wir umschreiben als

$$y_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{(n+1)-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}.$$

Da die Folge der Zahlen  $1/n$  eine Nullfolge ist, gilt dasselbe auch für die um eins verschobene Folge mit Gliedern  $1/(n+1)$  sowie deren Doppeltes  $(2/(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ ; subtrahieren wir diese Folge von der konstanten Folge aus lauter Einsen, erhalten wir die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die somit gegen eins konvergiert.

Auch bei der Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wird die Situation klarer durch Umschreiben:

$$z_n = \frac{3(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{3(n+1)+3}{(n+1)^2} = \frac{3}{n+1} + \frac{3}{(n+1)^2}.$$

Die Folge ist also die Summe zweier Nullfolgen und damit selbst eine Nullfolge.

$u_n = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{für ungerade } n \\ 2 & \text{für gerade } n \end{cases}$  definiert keine konvergente Folge: Würde sie nämlich gegen  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren, gäbe es zu  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $|x - u_n|$  für alle  $n \geq n_0$  kleiner wäre als  $\varepsilon$ . Unter den  $n \geq n_0$  gibt es aber sowohl gerade als auch ungerade, also wäre

$$|x| < \frac{1}{2} \quad \text{d.h.} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |x-2| < \frac{1}{2} \quad \text{d.h.} \quad \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}.$$

Diese beiden Ungleichungen kann aber keine reelle Zahl gleichzeitig erfüllen. Somit ist die Folge nicht konvergent, und da sie nur die Werte 0 und 2 annimmt, kann sie auch nicht bestimmt divergent sein. Also ist sie unbestimmt divergent.

Auch die Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist unbestimmt divergent: Sie kann nicht gegen ein  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren, weil sonst z.B. ein  $n_0$  geben müßte, so daß im offenen Intervall  $(x - 1, x + 1)$  alle Zahlen der Form  $(-1)^n(2n + 1)$  mit  $n \geq n_0$  liegen müßten, und sie ist auch nicht bestimmt divergent gegen  $\infty$  oder  $-\infty$ , da es auch nur für beliebig große Indizes sowohl positive als auch negative Folgenglieder gibt.

- i) Welche der hier definierten komplexen Zahlenfolgen ist konvergent, und wohin konvergiert sie gegebenenfalls?

$$x_n = \frac{1-i}{n} + \left(\frac{1}{1+i}\right)^n, \quad y_n = 1 + i^n, \quad z_n = \left(\frac{3-i}{2+i}\right)^n$$

**Lösung:**  $x_n$  ist aus zwei Termen zusammengesetzt, die wir am besten zunächst getrennt betrachten. Der erste Summand  $(1-i)/n$  definiert offensichtlich eine Nullfolge, denn das ist ja einfach unser Standardbeispiel  $1/n$  multipliziert mit der Konstanten  $1-i$ . Für den zweiten Term berechnen wir zunächst den Betrag der Basis:

$$\left|\frac{1}{1+i}\right| = \sqrt{\frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1-i}} = \sqrt{\frac{1}{1+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} < 1.$$

Somit ist die Folge der Potenzen von  $1/(1+i)$  eine Nullfolge,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist also eine Summe zweier Nullfolgen und damit selbst eine Nullfolge.

Da  $i^n$  abwechselnd die Werte  $i, -1, -i$  und  $1$  annimmt, ist auch die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  periodisch mit Periode vier; sie nimmt nacheinander jeweils die Werte  $1+i, 0, 1-1$  und  $2$  an. Daß sie unbestimmt divergent ist, folgt genauso wie im Falle der Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der vorigen Aufgabe.

Die Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  schließlich ist eine Folge von Potenzen einer festen Zahl; wir müssen also deren Betrag berechnen:

$$\left|\frac{3-i}{2+i}\right| = \sqrt{\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{3+i}{2-i}} = \sqrt{\frac{9+1}{4+1}} = \sqrt{2} > 1.$$

Damit divergiert die Folge.

- j) Welche der Folgen aus den beiden vorigen Aufgaben sind beschränkt? Welche der reellen Folgen sind monoton wachsend, welche monoton fallend?

**Lösung:** Beginnen wir mit den reellen Folgen! Wie wir gesehen haben divergiert die Folge  $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\infty$ , ist also nicht beschränkt. Sie ist allerdings (sogar streng) monoton wachsend, denn ist  $n > m$ , so ist auch  $\sqrt{n} > \sqrt{m}$ .

$y_n$  hatten wir geschrieben als  $1 - 2/(n+1)$ ; auch diese Folge ist streng monoton wachsend, denn ist  $n > m$ , so ist  $2/(n+1) < 2/(m+1)$ , also  $1 - 2/(n+1) > 1 - 2/(m+1)$ . Somit ist  $y_1 = 0$  eine untere Schranke und der Grenzwert eins eine obere.

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist die Summe zweier monoton fallender Nullfolgen, also selbst monoton fallend. Die Folge ist auch beschränkt mit  $z_1 = \frac{2}{4}$  als oberer und der Null als unterer Schranke.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pendelt ständig zwischen 0 und 2 hin- und her; damit ist 0 eine untere und 2 eine obere Schranke. Monotonie haben wir hier natürlich keine.

Auch die Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist nicht monoton, da sie ja ständig zwischen positiven und negativen Zahlen hin- und herspringt; sie ist auch offensichtlich nicht beschränkt.

Bei den komplexen Folgen ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  als Nullfolge natürlich beschränkt; da  $|1-i|$  gleich  $\sqrt{2} < 2$  und damit  $|1/(1-i)| < 1$  ist, wäre zum Beispiel drei eine Schranke für den Betrag.

$y_n$  kann nur vier Werte annehmen, also ist die Folge beschränkt mit z.B. der Zwei als Schranke. Die Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  schließlich ist unbeschränkt.

k) Die Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seien gegeben durch

$$x_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n} \quad \text{und} \quad y_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}.$$

Zeigen Sie, daß  $x_n > y_n$  für alle  $n < 1\,000\,000$ , daß aber trotzdem  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist, während  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bestimmt divergiert gegen  $+\infty$ !

**Lösung:** Für  $n < 1\,000\,000$  ist

$$\frac{n}{1000} < 1000, \text{ also } n + \frac{n}{1000} < n + 1000, \text{ also } \sqrt{n + \frac{n}{1000}} < \sqrt{n + 1000}$$

und damit  $y_n < x_n$ .

Die Folge  $(x_n)$  ist eine Nullfolge, denn nach der dritten binomischen Formel ist

$$(\sqrt{n+1000} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}) = 1000,$$

also ist

$$\sqrt{n+1000} - \sqrt{n} = \frac{1000}{\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}} < \frac{1000}{\sqrt{n}}.$$

Für ein vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  und eine natürliche Zahl  $n_0 > 1\,000\,000/\varepsilon^2$  ist daher

$$|x_n| = x_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n} < \frac{1000}{\sqrt{n}} \leq \frac{1000}{\sqrt{n_0}} < \frac{1000\varepsilon}{1000} = \varepsilon$$

für alle  $n \geq n_0$ , womit gezeigt ist, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  ist.

Die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dagegen divergiert bestimmt gegen  $+\infty$ , denn für eine vorgegebene Schranke  $M > 0$  und alle  $n > M^2$  ist

$$y_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} > \sqrt{n} > \sqrt{M^2} = M.$$

l) Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei rekursiv definiert durch  $x_1 = a$  für eine reelle Zahl  $a > 0$  und

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left( 2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right) \quad \text{für } n > 1.$$

Zeigen Sie: Falls die Folge konvergiert, konvergiert sie gegen  $\sqrt[3]{a}$ !

**Lösung:** Falls die Folge gegen eine Zahl  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert, ist

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left( 2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right) = \frac{1}{3} \left( 2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( 2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{a}{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^2} \right) = \frac{1}{3} \left( 2x + \frac{a}{x^2} \right). \end{aligned}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit  $3x^2$  erhalten wir  $3x^3 = 2x^3 + a$ , d.h.  $x^3 = a$ .

m)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei eine konvergente Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit Grenzwert  $x$ . Zeigen Sie, daß dann die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $y_n = \sqrt{x_n}$  gegen  $\sqrt{x}$  konvergiert!

**Lösung:** Wir betrachten zunächst den Fall  $x = 0$ . Dann gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $|x_n| < \varepsilon^2$  für alle  $n \geq n_0$ . Damit ist auch  $|y_n| = |\sqrt{x_n}| = \sqrt{x_n} < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ , also konvergiert auch die Folge der Wurzeln gegen Null.

Um die beiden Folgen auch für  $x > 0$  miteinander in Zusammenhang zu bringen, verwenden wir – wie so oft bei Wurzeln – die dritte binomische Formel:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{x_n})(\sqrt{x} + \sqrt{x_n}) = x - x_n.$$

Damit ist

$$|\sqrt{x} - y_n| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_n}| = \frac{|x - x_n|}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_n}|} \leq \frac{|x - x_n|}{\sqrt{x}}.$$

Für ein vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  verwenden wir nun zunächst die vorausgesetzte Konvergenz der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ; danach gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $|x - x_n| < \sqrt{x} \cdot \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Damit ist nach obiger Formel für diese  $n$  auch  $|\sqrt{x} - y_n| < \varepsilon$ .

*n)* Zeigen Sie: Ist  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge komplexer Zahlen  $z_n = x_n + iy_n$  mit  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ , so konvergieren auch die reellen Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ! Ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n ?$$

**Lösung:** Das sollte eigentlich so sein, also versuchen wir, es zu beweisen. Der Grenzwert der Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei  $z = x + iy$ ; es gibt also zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$|z - z_n| = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Da  $(x - x_n)^2$  und  $(y - y_n)^2$  beide größer oder gleich null sind, folgt dann auch

$$\begin{aligned} |x - x_n| &= \sqrt{(x - x_n)^2} \leq \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} < \varepsilon \quad \text{und} \\ |y - y_n| &= \sqrt{(y - y_n)^2} \leq \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle  $n \geq n_0$ . Also konvergiert die Folge der Realteile gegen den Realteil von  $z$  und die der Imaginärteile gegen den Imaginärteil.