Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 6.–8. Oktober 2014

a) Richtig oder falsch: Jede konvergente Folge komplexer Zahlen ist beschränkt.

b) Richtig oder falsch: Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen konvergiert.

c) Richtig oder falsch: Jede periodische Folge reeller Zahlen ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.

d) Richtig oder falsch: Jede monoton wachsende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten beschränkt

e) Richtig oder falsch: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist genau dann beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

f) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien drei Folgen reeller Zahlen derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \le y_n \le z_n$. Zeigen Sie: Falls die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide konvergent sind und denselben Grenzwert x haben, so konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x !

g) Gilt auch die folgende Verallgemeinerung: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien drei Folgen reeller Zahlen derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \le y_n \le z_n$. Außerdem seien die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide konvergent. Dann ist auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n \le \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

h) Entscheiden Sie für jede der hier definierten reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und so weiter, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist! Was können Sie im konvergenten Fall über den Grenzwert sagen?

$$x_n = \sqrt{n}, \quad y_n = \frac{n-1}{n+1}, \quad z_n = \frac{3(n+2)}{(n+1)^2}, \quad u_n = 1 + (-1)^n, \quad v_n = (-1)^n(2n+1)$$

i) Welche der hier definierten komplexen Zahlenfolgen ist konvergent, und wohin konvergiert sie gegebenenfalls?

$$x_n = \frac{1-i}{n} + \left(\frac{1}{1+i}\right)^n, \qquad y_n = 1 + i^n, \qquad z_n = \left(\frac{3-i}{2+i}\right)^n$$

j) Welche der Folgen aus den beiden vorigen Aufgaben sind beschränkt? Welche der reellen Folgen sind monoton wachsend, welche monoton fallend?

k) Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien gegeben durch

$$x_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n} \quad \text{und} \quad y_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}\,.$$

Zeigen Sie, daß $x_n > y_n$ für alle $n < 1\,000\,000$, daß aber trotzdem $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, während $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergiert gegen $+\infty$!

l) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 = a$ für eine reelle Zahl $a > 0$ und

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right) \qquad \text{für } n > 1\,.$$

Zeigen Sie: Falls die Folge konvergiert, konvergiert sie gegen $\sqrt[3]{a}$!

m) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine konvergente Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit Grenzwert x. Zeigen Sie, daß dann die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = \sqrt{x_n}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert!

n) Zeigen Sie: Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen $z_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, so konvergieren auch die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$! Ist

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n\ ?$$