Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 29. Sept.–1. Okt. 2014

a) Wir definieren für eine komplexe Zahl $z \neq 0$ *die* Quadratwurzel $\sqrt{z}$ von z als jene komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z$ und entweder $\mathfrak{Re}\, w > 0$ oder $\mathfrak{Re}\, w = 0$ und $\mathfrak{Im}\, w > 0$. Zeigen Sie, daß stets genau ein w mit dieser Eigenschaft existiert!

Lösung: Für $z \neq 0$ hat die Gleichung $w^2 = z$ zwei Lösungen w_1, w_2 mit $w_2 = -w_1$. Falls der Realteil einer Lösung nicht verschwindet, hat die eine positiven und die andere negativen Realteil, es gibt also genau eine mit positivem. Falls $\mathfrak{Re}\, w_1 = \mathfrak{Re}\, w_2 = 0$ ist, muß wegen $z \neq 0$ und damit auch $w_i \neq 0$ der Imaginärteil von Null verschieden sein; damit hat eine der beiden Lösungen positiven, die andere negativen Imaginärteil.

b) Was ist $\sqrt{-i}$?

Lösung: Wie wir wissen, ist $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ eine Quadratwurzel von i, also ist

$$i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

eine Quadratwurzel von $-i$ und

$$\sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,.$$

c) Ist stets $\sqrt{zw} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$?

Lösung: Nein: $\sqrt{-i} \cdot \sqrt{-i} = -i \neq \sqrt{-1} = i\,.$

d) Finden Sie eine bijektive Abbildung von der Menge U aller ungerader natürlicher Zahlen in die Menge G aller gerader natürlicher Zahlen!

Lösung: Für jede ungerade Zahl $u \in U$ ist $u+1$ eine gerade Zahl aus G. Die Abbildung

$$f\colon \begin{cases} U \to G \\ u \mapsto u+1 \end{cases}$$

ist injektiv, denn aus $u+1 = v+1$ folgt $u = v$; sie ist auch surjektiv, denn für jede gerade Zahl $g \in G$ ist $g-1$ ungerade und wegen $g \geq 2$ auch ein Element von U. Somit sind U und G gleichmächtig.

e) Zeigen Sie, daß es zu jeder natürlichem Zahl n eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl k gibt mit $(k-1)^2 < n \leq k^2$!

Lösung: Für $k = 1$ ist $(1-1)^2 = 0$ kleiner als jede natürliche Zahl n; umgekehrt gibt es zu jeden $n \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl, die größer oder gleich n ist, z.B. n^2. Es gibt daher eine größte natürliche Zahl k mit $(k-1)^2 \leq n$; für diese ist $(k-1)^2 < n \leq k^2$. Für alle $\ell > k$ ist $n \leq k^2 \leq (\ell-1)^2$, so daß $(\ell-1)^2$ nicht kleiner als n sein kann. Für alle $\ell < k$ ist $\ell \leq k-1$, also $\ell^2 \leq (k-1)^2 < n$, so daß n nicht kleiner oder gleich ℓ^2 sein kann. Daher ist k die einzige natürliche Zahl mit $(k-1)^2 < n \leq k^2$ und somit eindeutig bestimmt.

f) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen k, ℓ mit $\ell < 2k$, so daß $n = (k-1)^2 + \ell$ ist.

Lösung: Nach der vorigen Aufgabe gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die gilt $(k-1)^2 < n \leq k^2$. Für dieses k ist $\ell \underset{\text{def}}{=} n-(k-1)^2$ eine natürliche Zahl und

$$\ell = n-(k-1)^2 \leq k^2-(k-1)^2 = 2k-1 < 2k\,.$$

Sind r, s irgendwelche natürliche Zahlen, für die $n=(r-1)^2+s$ ist und $s<2r$, so ist $s \leq 2r-1$ und

$$(r-1)^2 < n \leq (r-1)^2+2r-1 = r^2\,;$$

da k die einzige natürliche Zahl mit $(k-1)^2 < n \leq k^2$ ist, muß $r=k$ sein. Dann ist auch

$$s = n-(r-1)^2 = n-(k-1)^2 = \ell\,,$$

die beiden Paare stimmen also überein.

g) Zeigen Sie, daß $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist zu

$$M = \{(k,\ell) \mid k,\ell \in \mathbb{N} \text{ und } \ell < 2k\}\,!$$

Lösung: Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \begin{cases} M \to \mathbb{N} \\ (k,\ell) \mapsto (k-1)^2+\ell \end{cases}$$

Da es nach der vorigen Aufgabe zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau ein Paar $(k,\ell) \in M$ gibt mit $f(k,l)=n$, ist f bijektiv. Diese Existenz einer bijektiven Abbildung ist die Definition der Gleichmächtigkeit der beiden Mengen. (Sie zeigt insbesondere auch, daß M abzählbar ist.)

h) Berechnen Sie in einem Gleitkommasystem mit drei Dezimalstellen in der Mantisse und Exponenten zwischen -3 und 3 die beiden Zahlen

$$x = (0{,}765+0{,}431)-(0{,}654+0{,}32) \quad \text{und} \quad y = (0{,}765-0{,}654)+(0{,}431-0{,}32)\,!$$

Runden Sie dabei, falls sich eine Zahl nicht exakt darstellen läßt, jeweils zur nächsten darstellbaren Zahl!

Lösung: Die vier Ausgangszahlen lassen sich allesamt exakt darstellen, sogar mit Exponent null. Weiter ist

$$0{,}765+0{,}431 = 1{,}196 \quad \text{und} \quad 0{,}654+0{,}32 = 0{,}974\,.$$

Das zweite Ergebnis ist in unserem System darstellbar, das erste muß auf $0{,}120 \cdot 10^1$ gerundet werden. Zur Berechnung von x müssen wir also $0{,}974$ von $0,12 \cdot 10^1$ subtrahieren; das exakte Ergebnis ist 0,226, und das ist auch darstellbar. Somit ist $x = 0{,}226$.
Bei der Berechnung von y sind beide Klammern exakt darstellbar und gleich 0,111, also ist $y = 0{,}222$. Wenn wir in $\mathbb{R}$ rechnen, ist natürlich $x = y = 0{,}222$.

i) Beweisen Sie die folgende *Vierecksungleichung:* Für vier reelle Zahlen $x,y,z,w \in \mathbb{R}$ ist stets: $\big||x-y|-|z-w|\big| \leq |x-z|+|y-w|$

Lösung: Nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf $x-y$ und $y-z$, ist

$$\big||x-y|-|y-z|\big| \leq |x-z| \quad \text{und} \quad \big||y-z|-|z-w|\big| \leq |y-w|\;.$$

Wie wir bereits wissen, ist der Betrag einer Summe kleiner oder gleich der Summe der Beträge; daher ist

$$\begin{aligned}\big||x-y|-|z-w|\big| &= \big|\big(|x-y|-|y-z|\big)+\big(|y-z|-|z-w|\big)\big| \\ &\leq \big||x-y|-|y-z|\big| + \big||y-z|-|z-w|\big| \leq |x-z|+|y-w|\;,\end{aligned}$$

wie behauptet.

j) Entscheiden Sie, ob die Folgen mit

$$a_n = 4 + \sqrt{\frac{1}{n}}, \qquad b_n = 5 + (-1)^n n^2 \quad \text{und} \quad c_n = \frac{n+3}{n+5}$$

konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert!

Lösung: Da $\sqrt{1/n}$ mit wachsendem n immer kleiner wird, sollte die Folge der a_n gegen vier konvergieren. In der Tat ist für $\varepsilon > 0$

$$|a_n - 4| = \sqrt{\frac{1}{n}} < \varepsilon \quad \text{genau dann wenn} \quad \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon},$$

und das gilt genau dann, wenn $n > 1/\varepsilon^2$ ist. Wählen wir also irgendein $n_0 > 1/\varepsilon$, so ist $|a_n - 4| < 4$ für alle $n \ge n_0$.

Wäre die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert b, so gäbe es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|b_n - b| < 1$ wäre für alle $n \ge n_0$. Für alle $n \ge n_0$ wäre daher

$$|b_{n+1} - b_n| = |(b_{n+1} - b) - (b_n - b)| \le |b_{n+1} - b| + |b_n - b| < 1 + 1 = 2\,.$$

Tatsächlich ist aber

$$\begin{aligned} |b_{n+1} - b_n| &= \left|5 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 - 5 - (-1)^n n^2\right| = \left|(-1)^n\left(-(n+1)^2 - n^2\right)\right| \\ &= \left|(n+1)^2 + n^2\right| \end{aligned}$$

für keine einzige natürliche Zahl kleiner als zwei.

$$c_n = \frac{n+3}{n+5} = \frac{n+5-2}{n+5} = 1 - \frac{2}{n+5}$$

sieht so aus, als sollte es gegen eins konvergieren. In der Tat ist

$$|c_n - 1| = \frac{2}{n+5} < \frac{2}{n} < \varepsilon \quad \text{genau dann wenn} \quad n > \frac{2}{\varepsilon}\,.$$

Wählen wir also ein n_0, das diese Bedingung erfüllt, so ist $|c_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$; die Folge konvergiert daher gegen eins.

k) Wir bezeichnen auch eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen c_n genau dann als Nullfolge, wenn es zu jedem (reellen) $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|c_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Welche der hier angegebenen Vorschriften definieren Nullfolgen?

$$a_n = \frac{3+4i}{n+5i}, \qquad b_n = \frac{1}{(3+4i)^n}, \qquad c_n = i^n, \qquad d_n = \frac{1}{n-i} - \frac{1}{n+i}$$

Lösung:

$$|a_n| = \left|\frac{3+4i}{n+5i}\right| = \frac{|3+4i|}{|n+5i|} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{n^2+5^2}} = \frac{5}{\sqrt{n^2+5^2}} < \frac{5}{\sqrt{n^2}} = \frac{5}{n}$$

ist kleiner als eine vorgegebene Zahl $\varepsilon > 0$, sobald $n > 5/\varepsilon$. Jedes $n_0 > 5/\varepsilon$ erfüllt also die Forderung, d.h. wir haben eine Nullfolge.

$$|b_n| = \left|\frac{1}{(3+4i)^n}\right| = \frac{1}{|3+4i|^n} = \frac{1}{5^n} < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n},$$

da laut erstem Übungsblatt $n < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählen wir zu $\varepsilon > 0$ also ein $n_0 > 1/\varepsilon$, so ist $|b_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$; die Folge ist somit eine Nullfolge.

$|c_n| = |i^n| = |i|^n = 1$ wird nie kleiner als $\varepsilon = 1$, wir haben also keine Nullfolge. Die Folge ist periodisch und nimmt immer wieder die Werte $i, -1. -i, 1$ an.

$$d_n = \frac{1}{n-i} - \frac{1}{n+i} = \frac{(n+i)-(n-i)}{(n+i)(n-i)} = \frac{2i}{n^2+1}$$

hat Betrag $2/(n^2+1) < 2/n$. Wählen wir zu $\varepsilon > 0$ daher ein $n_0 > 2/\varepsilon$, so ist $|d_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$, wir haben also eine Nullfolge.