Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 29. Sept.–1. Okt. 2014

a) Wir definieren für eine komplexe Zahl $z \neq 0$ *die* Quadratwurzel $\sqrt{z}$ von z als jene komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z$ und entweder $\Re w > 0$ oder $\Re w = 0$ und $\Im w > 0$. Zeigen Sie, daß stets genau ein w mit dieser Eigenschaft existiert!

b) Was ist $\sqrt{-i}$?

c) Ist stets $\sqrt{zw} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$?

d) Finden Sie eine bijektive Abbildung von der Menge U aller ungerader natürlicher Zahlen in die Menge G aller gerader natürlicher Zahlen!

e) Zeigen Sie, daß es zu jeder natürlichem Zahl n eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl k gibt mit $(k-1)^2 < n \leq k^2$!

f) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen k, ℓ mit $\ell < 2k$, so daß $n = (k-1)^2 + \ell$ ist.

g) Zeigen Sie, daß $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist zu

$$M = \left\{(k,\ell) \;\middle|\; k,\ell \in \mathbb{N} \text{ und } \ell < 2k\right\} !$$

h) Berechnen Sie in einem Gleitkommasystem mit drei Dezimalstellen in der Mantisse und Exponenten zwischen -3 und 3 die beiden Zahlen

$$x = (0{,}765 + 0{,}431) - (0{,}654 + 0{,}32) \quad \text{und} \quad y = (0{,}765 - 0{,}654) + (0{,}431 - 0{,}32)\,!$$

Runden Sie dabei, falls sich eine Zahl nicht exakt darstellen läßt, jeweils zur nächsten darstellbaren Zahl!

i) Beweisen Sie die folgende *Vierecksungleichung:* Für vier reelle Zahlen $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ ist stets: $\big||x-y| - |z-w|\big| \leq |x-z| + |y-w|$

j) Entscheiden Sie, ob die Folgen mit

$$a_n = 4 + \sqrt{\frac{1}{n}}, \qquad b_n = 5 + (-1)^n n^2 \quad \text{und} \quad c_n = \frac{n+3}{n+5}$$

konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert!

k) Wir bezeichnen auch eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen c_n genau dann als Nullfolge, wenn es zu jedem (reellen) $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|c_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Welche der hier angegebenen Vorschriften definieren Nullfolgen?

$$a_n = \frac{3+4i}{n+5i}, \qquad b_n = \frac{1}{(3+4i)^n}, \qquad c_n = i^n, \qquad d_n = \frac{1}{n-i} - \frac{1}{n+i}$$