Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 22–24. September 2014

a) Richtig oder falsch: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ ist eine Nullfolge.

Lösung: *Richtig,* denn für alle n ist $0 < a_n < \frac{1}{n}$; wenn wir uns ein $\varepsilon > 0$ vorgeben, ist also $a_n < \varepsilon$ für alle $n > 1/\varepsilon$. Ist n_0 die kleinste natürliche Zahl größer $1/\varepsilon$, ist also $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$.
(Das ist natürlich eine sehr grobe Abschätzung; da wir nur zeigen müssen, daß es zu jedem ε *irgendein* n_0 gibt, lohnt es sich nicht, mehr Aufwand zu betreiben.)

b) Richtig oder falsch: Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ist eine Nullfolge.

Lösung: Hier läßt sich direkt nichts sehen; wir müssen b_n zunächst geeignet umformen. Da sich nichts anderes anbietet, versuchen wir es mit der dritten binomischen Formel:

$$b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}\,,$$

und das ist offensichtlich kleiner als eine vorgegebene Schranke $\varepsilon > 0$, wenn $n > 1/\varepsilon^2$. Ist n_0 die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als $1/\varepsilon^2$, ist also $|b_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$.

c) Richtig oder falsch: Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (n+1)^2 - n^2$ ist eine Nullfolge.

Lösung: Das ist offensichtlich falsch, denn $c_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ ist die Folge der ungeraden Zahlen. Deren Glieder mit wachsendem n immer größer; es kann sich also unmöglich um eine Nullfolge handeln: Schon für $\varepsilon = 1$ gibt es kein einziges n mit $|c_n| < \varepsilon$.

d) Richtig oder falsch: Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ ist eine Nullfolge.

Lösung: *Richtig,* denn

$$|d_n| = d_n = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

für alle $n \ge 1/\sqrt{\varepsilon}$. Wir können für n_0 also irgendeine natürliche Zahl größer $1/\sqrt{\varepsilon}$ wählen.

e) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_n + a_{n+1}$!

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, daß es dazu ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|b_n| < \varepsilon$ ist für alle $n \ge n_0$.
Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es auf jeden Fall eine natürliche Zahl n_0, so daß $|a_n| < \varepsilon/2$ ist für alle $n \ge n_0$. Insbesondere ist also für $n \ge n_0$ auch $|a_{n+1}| \le \varepsilon/2$, denn natürlich ist auch $n+1 \ge n_0$. Somit ist für $n \ge n_0$ auch

$$|b_n| = |a_n + a_{n+1}| \le |a_n| + |a_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Dies zeigt, daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

f) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = 2a_n + 3a_{n+1}$!

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, daß es dazu ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|c_n| < \varepsilon$ ist für alle $n \ge n_0$.

Ist $|a_n| < \varepsilon$ und $|a_{n+1}| < \varepsilon$, so ist

$$|c_n| = |2a_n + 3a_{n+1}| \le |2a_n| + |3a_{n+1}| = 2\,|a_n| + 3\,|a_{n+1}| \le 2\varepsilon + 3\varepsilon = 5\varepsilon\,.$$

Daher nutzen wir die Nullfolgeneigenschaft von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so aus, daß wir folgern: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n| < \varepsilon/5$ für alle $n \ge n_0$. Für diese n ist dann auch $|a_{n+1}| \le \varepsilon/5$, also ist

$$|c_n| = |2a_n + 3a_{n+1}| \le 2\,|a_n| + 3\,|a_{n+1}| < \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} = \varepsilon\,.$$

Dies zeigt, daß $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

g) Zeigen Sie: Ist $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung über $\mathbb{R}$ mit $a_1 > 0$, so ist auch $\left(\left[\sqrt{a_n}, \sqrt{b_n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung.

Lösung: Wir müssen zwei Dinge zeigen: Als erstes muß für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Intervall $\left[\sqrt{a_{n+1}}, \sqrt{b_{n+1}}\right]$ im Intervall $\left[\sqrt{a_n}, \sqrt{b_n}\right]$ liegen, d.h. die Ungleichung

$$\sqrt{a_n} \le \sqrt{a_{n+1}} \le \sqrt{b_{n+1}} \le \sqrt{b_n}$$

muß erfüllt sein. Da $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist, wissen wir jedenfalls, daß $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ ist; außerdem ist $a_1 > 0$, also erst recht $a_n > 0$. Daher reicht es zu zeigen, daß für zwei reelle Zahlen x, y mit $0 < x \le y$ auch $\sqrt{x} \le \sqrt{y}$ ist. Wäre $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, so wäre auch

$$x = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x} > \sqrt{x}\cdot\sqrt{y} > \sqrt{y}\cdot\sqrt{y} = y\,,$$

im Widerspruch zur Annahme.
Als zweites müssen wir zeigen, daß die Folge der $\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}$ eine Nullfolge ist. Wir wissen, daß die Folge der $b_n - a_n$ eine Nullfolge ist, und nach der dritten binomischen Formel ist

$$b_n - a_n = \left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}\right)\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right),$$

also ist

$$\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) = \frac{b_n - a_n}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}} \le \frac{b_n - a_n}{\sqrt{a_n}} \le \frac{b_n - a_n}{\sqrt{a_1}}\,,$$

denn $\sqrt{a_1} \le \sqrt{a_n} \le \sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$.
Zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so daß $|b_n - a_n| < \sqrt{a_1}\,\varepsilon$ ist für alle $n \ge n_0$. Für diese n ist daher auch

$$\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) \le \frac{b_n - a_n}{\sqrt{a_1}} \le \frac{\sqrt{a_1}\,\varepsilon}{\sqrt{a_1}} = \varepsilon\,,$$

die Folge $\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Nullfolge.

h) Berechnen Sie die Intervalle $[1, 2] + [-2, -1]$, $[1, 2] - [-2, -1]$ und $[1, 2] \cdot [-2, -1]$!

Lösung: Bei der Addition von Intervallen können wir einfach die Schranken addieren; daher ist $[1, 2] + [-2, -1] = [-1, 1]$.
Die Subtraktion können wir auf eine Addition zurückführen, denn für alle $x \in [-2, -1]$ ist $-x \in [1, 2]$ und umgekehrt. Somit ist

$$[1, 2] - [-2, -1] = [1, 2] + [1, 2] = [2, 4]\,.$$

Für die Multiplikation schließlich müssen wie die vier Produkte aus Schranken verschiedener Intervalle betrachten:

$$1\cdot(-2) = -2,\quad 1\cdot(-1) = -1,\quad 2\cdot(-2) = -4 \quad\text{und}\quad 2\cdot(-1) = -2\,.$$

Das kleinste dieser Produkte ist -4, das größte -1, also ist

$$[1, 2]\cdot[-2, -1] = [-4, -1]\,.$$

i) Finden Sie eine Intervallschachtelung mit endlichen Dezimalbrüchen als Grenzen für die Zahl $\frac{1}{11}$!

Lösung: Die Dezimaldarstellung von $1/11$ ist periodisch und gleich $0,\overline{09}$. Eine Intervallschachtelung erhalten wir dadurch, daß wir für die untere Schranke einfach nach einer gewissen Anzahl von Ziffern abbrechen und für die obere eine Einheit der letzten Dezimalstelle addieren. Konkret könnten wir zum Beispiel die Intervalle

$$[0{,}09,\ 0{,}1],\quad [0{,}0909,\ 0{,}091],\quad [0{,}090909,\ 0{,}09091],\quad [0{,}09090909,\ 0{,}0909091],\quad \dots$$

betrachten. Formal läßt sich dies definieren als die Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$ mit

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{100^i} \quad \text{und} \quad b_n = a_n + \frac{1}{100^n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{9}{100^i} + \frac{1}{10^{2n-1}}\,.$$

j) *Richtig oder falsch:* $\sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

Lösung: Hier ist $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = 2-2\sqrt{2}\sqrt{3}+3 = 5-2\sqrt{6}$. Da $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ negativ ist, $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ aber positiv, ist die Gleichung trotzdem falsch; tatsächlich ist

$$\sqrt{2}-\sqrt{3} = -\sqrt{5-2\sqrt{6}} \quad \text{und} \quad \sqrt{3}-\sqrt{2} = \sqrt{5-2\sqrt{6}}\,.$$

k) Zeigen Sie: $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$!

Lösung: Mit den Formeln aus den letzten beiden Aufgaben folgt das natürlich sofort:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}} = (\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{3}\,.$$

Will man die Formel direkt beweisen, muß man zunächst die linke Seite quadrieren:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 &= 5+2\sqrt{6}+2\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}+5-2\sqrt{6}\\ &= 10+2\sqrt{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})} = 10+2\sqrt{25-4\cdot 6} = 12\,.\end{aligned}$$

Da $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ positiv ist, folgt

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}\,.$$

l) Vereinfachen Sie die Ausdrücke $\dfrac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$ und $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$!

Lösung: Im ersten Fall erweitern wir den Bruch mit $\sqrt{2}-1$ und erhalten

$$\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}-\sqrt{5}-1}{2-1} = \sqrt{10}+\sqrt{2}-\sqrt{5}-1\,.$$

Beim zweiten Ausdruck erweitern wir entsprechend mit $\sqrt{5}+\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{5+2\sqrt{10}+2}{5-2} = \frac{7}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{10}\,.$$

m) Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten binomischen Formel, daß für zwei positive Zahlen a, b das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ nicht größer als das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(a+b)$ sein kann und daß die beiden nur im Fall $a=b$ gleich sind!

Lösung: Die zweite binomische Formel für a und b bringt offensichtlich nichts; irgendwie müssen auch Wurzeln ins Spiel kommen. Probieren wir es mit

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b\,.$$

Als Quadrat muß dies größer oder gleich Null sein, also ist

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \quad \text{oder} \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}\,.$$

Dividieren wir diese Ungleichung noch durch zwei, haben wir die gewünschte Relation

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,.$$

Falls hier ein Gleichheitszeichen steht, muß auch $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = 0$ sein, also $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ und damit $a = b$. Umgekehrt ist im Falle $a = b$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a = \frac{a+b}{2}\,,$$

das geometrische Mittel ist also gleich dem arithmetischen.

n) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = i(1-i), \quad z_2 = (3+i)(3-i), \quad z_3 = (i+1)(i-1),$$
$$z_4 = i^{2014}, \quad z_5 = \frac{5+2i}{2+3i}, \quad z_6 = \frac{4+i}{2-i}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
z_1 &= i(1-i) = i \cdot 1 - i \cdot i = i - (-1) = 1 + i \\
z_2 &= (3+i)(3-i) = 3^2 - i^2 = 9 - (-1) = 10 \\
z_3 &= (i+1)(i-1) = i^2 - 1^2 = -1 - 1 = -2 \\
z_4 &= i^{2014} = (i^2)^{1007} = (-1)^{1007} = -1 \\
z_5 &= \frac{5+2i}{2+3i} = \frac{(5+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10 - 2\cdot(-3) - 15i + 4i}{2^2+3^2} = \frac{16}{13} - \frac{11}{13}i \\
z_6 &= \frac{4+i}{2-i} = \frac{(4+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8 - 1 + 4i + 2i}{2^2+1^2} = \frac{7}{5} + \frac{6}{5}i
\end{aligned}$$

o) Zeigen Sie: Für zwei komplexe Zahlen z, w ist $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$!

Lösung: Wir schreiben $z = x + iy$ und $w = u + iv$. Dann ist $zw = (ux - vy) + (vx + uy)i$, also $\overline{zw} = (ux - vy) - (vx + uy)i$. F'ur die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung erhalten wir $\overline{z} \cdot \overline{w} = (x - iy)(u - iv) = (ux - vy) - (vx + uy)i$, also dasselbe Ergebnis. Damit ist die Formel bewiesen.

p) Zeigen Sie: Für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ ist $|zw| = |z|\,|w|$!

Lösung: Wir können den Betrag einer komplexen Zahl schreiben als Wurzel aus dem Produkt der Zahl mit ihrer konjugiert komplexen Zahl. Somit ist

$$|zw| = \sqrt{zw \cdot \overline{zw}} = \sqrt{z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}} = \sqrt{z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \cdot \sqrt{w \cdot \overline{w}} = |z| \cdot |w|\,,$$

wobei wir das Ergebnis der vorigen Aufgabe sowie das Kommutativgesetz der Multiplikation benutzt haben.

Alternativ läßt sich das auch direkt nachrechen: Da Beträge immer größer oder gleich Null sind, genügt es zu zeigen, daß die Quadrate der beiden Seiten gleich sind. Für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ ist $zw = (xu - yv) + (xv + yu)i$, also

$$|zw|^2 = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = x^2u^2 - 2xyuv + y^2v^2 + x^2v^2 + 2xyuv + y^2u^2$$
$$= x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2 = x^2(y^2 + v^2) + y^2(v^2 + u^2) = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = |z|^2\,|w|^2\,.$$

q) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = -1$!

Lösung: Wir wissen, daß $z = -1$ eine Lösung ist, also können wir durch $z+1$ dividieren:

$$\begin{array}{l}
(z^3 + 1) \;:\; (z+1) = z^2 - z + 1 \\
\underline{z^3 + z^2} \\
\quad -z^2 + 1 \\
\quad \underline{-z^2 - z} \\
\qquad\quad z + 1
\end{array}$$

Somit ist $(z^3+1) = (z+1)(z^2-z+1)$, und wir müssen noch die Nullstellen des zweiten Faktors bestimmen. Das ist eine quadratische Gleichung, die sich in der üblichen Weise lösen läßt:

$$z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

gilt genau dann, wenn

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\,i}{2}.$$

Zusammen mit $z = -1$ sind das die sämtlichen Lösungen.

Alternative: Wir können auch genauso vorgehen wie im Skriptum bei der Lösung der Gleichung $z^3 = 1$: Wir machen den Ansatz $z = x + yi$; dann ist

$$z^3(x+yi)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot yi + 3x \cdot (yi)^2 + (yi)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$$

genau dann gleich minus eins, wenn

$$x^3 - 3xy^2 = -1 \quad \text{und} \quad 3x^2y - y^3 = y(3x^2 - y^2) = 0$$

ist. Die zweite Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $y = 0$ oder $y^2 = 3x^2$ ist.

$y = 0$ in die erste Gleichung eingesetzt führt auf $x^3 = -1$, also (da x eine reelle Zahl ist) $x = -1$. Die Wurzel $x + iy = 1$ ist in diesem Fall also einfach die wohlbekannte reelle Kubikwurzel.

Setzen wir $y^2 = 3x^3$ in die erste Gleichung ein, erhalten wir die Gleichung $-8x^3 = -1$ mit der Lösung $x = \frac{1}{2}$. Wegen $y^2 = 3x^2$ gibt es für y somit die beiden Möglichkeiten $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, die dritten Wurzeln von -1 sind also

$$-1, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i.$$

weitere Alternative: Wir hätten uns die ganze Rechnung sparen können, indem wir das Ergebnis aus dem Skriptum benutzen: Die Gleichung $z^3 = 1$ ist äquivalent zu $(-z)^3 = -1$. Sie hat die drei Lösungen

$$z = 1, \quad z = \rho = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i \quad \text{und} \quad z = \bar{\rho} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i.$$

Daher hat die Gleichung $z^3 = -1$ die drei Lösungen

$$z = -1, \quad z = -\rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i \quad \text{und} \quad z = -\bar{\rho} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i.$$

r) Finden Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^2 = 3 + 4i$!

Lösung: Wir schreiben $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$; laut Vorlesung ist dann im Falle $z^2 = a+ib$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} \quad \text{und} \quad y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a},$$

wobei die beiden Vorzeichen so gewählt werden müssen, daß xy dasselbe Vorzeichen wie b hat.

Hier ist $a = 3$ und $b = 4$, also müssen x und y dasselbe Vorzeichen haben. Weiter ist

$$\begin{aligned} x &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{3^2+4^2}+3} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{25}+3} \\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{8} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sqrt{2} = \pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \pm 2\,. \end{aligned}$$

Da $2xy = b = 4$ sein muß, also $xy = 2$, ist somit $y = \pm 1$. Die beiden Lösungen sind also $z = 2 + i$ und $z = -2 - i$.

s) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 25 = 0$!

Lösung: Durch quadratische Ergänzung wird die Gleichung zu $(x-3)^2 = -16$, die Lösungen sind also $x = 3 \pm 4i$.
(Wer die Lösungsformel für quadratische Gleichungen auswendig kennt, kann natürlich auch da einsetzen.)

t) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$!

Lösung: Quadratische Ergänzung führt auf die Gleichung

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}\,,$$

also ist

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\,.$$

u) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + 3ix + 4 = 0$!

Lösung: Verwenden wir hier zur Abwechslung einmal die Lösungsformel: Mit $p = 3i$ und $q = 4$ ist

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{3i}{2} \pm \sqrt{\frac{(3i)^2}{4} - 4} = -\frac{3i}{2} \pm \sqrt{\frac{-9}{4} - 4} = -\frac{3i}{2} \pm \sqrt{-\frac{25}{4}} = -\frac{3i}{2} \pm \frac{5i}{2}\,.$$

Somit ist $x = i$ oder $x = -4i$.