

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 22–24. September 2014

- a) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ist eine Nullfolge.
- b) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ist eine Nullfolge.
- c) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = (n+1)^2 - n^2$ ist eine Nullfolge.
- d) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ ist eine Nullfolge.
- e) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = a_n + a_{n+1}$!
- f) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so auch $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = 2a_n + 3a_{n+1}$!
- g) Zeigen Sie: Ist $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung über \mathbb{R} mit $a_1 > 0$, so ist auch $([\sqrt{a_n}, \sqrt{b_n}])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung.
- h) Berechnen Sie die Intervalle $[1, 2] + [-2, -1]$, $[1, 2] - [-2, -1]$ und $[1, 2] \cdot [-2, -1]$!
- i) Finden Sie eine Intervallschachtelung mit endlichen Dezimalbrüchen als Grenzen für die Zahl $\frac{1}{11}$!
- j) *Richtig oder falsch:* $\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$
- k) Zeigen Sie: $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$!
- l) Vereinfachen Sie die Ausdrücke $\frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}$ und $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$!
- m) Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten binomischen Formel, daß für zwei positive Zahlen a, b das geometrische Mittel \sqrt{ab} nicht größer als das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(a + b)$ sein kann und daß die beiden nur im Fall $a = b$ gleich sind!
- n) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:
$$z_1 = i(1 - i), \quad z_2 = (3 + i)(3 - i), \quad z_3 = (i + 1)(i - 1),$$
$$z_4 = i^{2014}, \quad z_5 = \frac{5 + 2i}{2 + 3i}, \quad z_6 = \frac{4 + i}{2 - i}$$
- o) Zeigen Sie: Für zwei komplexe Zahlen z, w ist $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$!
- p) Zeigen Sie: Für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ ist $|zw| = |z| |w|$!
- q) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = -1$!
- r) Finden Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^2 = 3 + 4i$!
- s) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 25 = 0$!
- t) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$!
- u) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + 3ix + 4 = 0$!