WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15–17. September 2014

a) Zeigen Sie, daß es keine rationale Zahl x gibt mit $x^2 = 10$!

Lösung: Angenommen, es gäbe so eine rationale Zahl x. Wir schreiben sie als $x = \frac{p}{q}$ mit zwei natürlichen Zahlen p, q, die nicht beide gerade sind. Da $p^2/q^2 = 10$ ist, ist $p^2 = 10q^2$ eine gerade Zahl, also auch p. Es gibt daher ein $r \in \mathbb{N}$ mit $p = 2r$ und

$$p^2 = 4r^2 = 10q^2, \quad \text{also} \quad 5q^2 = 2r^2 .$$

Somit ist auch $5q^2$ gerade, also auch q^2 und damit auch q. überlegt haben, q selbst, im Widerspruch zu unserer Annahme.

b) Zeigen Sie, daß es keine rationale Zahl x gibt mit $x^3 = 3$!

Lösung: Angenommen, es gäbe so eine rationale Zahl x. Wir schreiben sie als $x = \frac{p}{q}$ mit zwei natürlichen Zahlen p, q, die nicht beide durch drei teilbar sind. Dann ist $p^3/q^3 = 3$, d.h. $p^3 = 3q^3$. Somit ist p^3 durch drei teilbar. Wäre p nicht durch drei teilbar, so könnten wir p entweder schreiben als $p = 3k + 1$ oder $p = 3k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Da weder

$$(3k+1)^3 = (3k)^3 + 3 \cdot (3k)^2 + 3 \cdot (3k) + 1$$

noch

$$(3k+2)^3 = (3k)^3 + 3 \cdot (3k)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (3k) \cdot 4 + 8$$

durch drei teilbar sind (Alle Summanden außer dem letzten sind Dreierzahlen), muß auch p durch drei teilbar sein. Wir können daher eine natürliche Zahl r finden mit $p = 3r$ und $p^3 = 3^3 r^3$. Also ist $3^3 r^3 = 3q^3$, und $q^3 = 3^2 r^3$ ist eine Dreierzahl. Wie wir gerade gesehen haben, ist dann auch q eine Dreierzahl, im Widerspruch zu unserer Annahme. Also gibt es keine rationale Zahl x mit $x^3 = 3$.

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß die Summe der ersten n Quadratzahlen nach der Formel

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

berechnet werden kann!

Lösung: *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ ist die Summe der ersten n Quadratzahlen $1^2 = 1$ und

$$\frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 ,$$

die Behauptung ist also richtig.

Induktionsschritt: Angenommen, wir wissen daß für eine gewisse natürliche Zahl n gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\ &= \frac{(n+1)\big(2n^2 + n + 6n + 6\big)}{6} = \frac{(n+1)\big(2n^2 + 7n + 6\big)}{6} \,.\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, daß dies mit

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)(n+2)\big(2(n+1)+1\big)}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

übereinstimmt, was offensichtlich der Fall ist.
(Wir hätten die Zähler natürlich auch vollständig ausmultiplizieren können; wer das tut wird aber schnell feststellen, daß die Rechnung durch das Ausklammern des gemeinsamen Faktors $(n+1)$ deutlich einfacher wurde.)

d) Berechnen Sie die Summe der Quadrate der ersten n ungeraden Zahlen!

Lösung: Die ersten n ungeraden Zahlen sind $1, 3, \cdots 2n-1$; wir suchen also

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n} (4k^2 - 4k + 1) \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) + 3n}{3} = \frac{2 \cdot (2n^3 + 3n^2 + n) - 6(n^2+n) + 3n}{3} \\ &= \frac{4n^3 - n}{3} \,.\end{aligned}$$

e) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Abschwächung der BERNOULLIschen Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \geq -1 \,.$$

Lösung: *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ müssen wir die Ungleichung $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ beweisen; sie ist trivialerweise richtig, denn auf beiden Seiten steht einfach $1 + x$.
Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Behauptung sei für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Wir müssen zeigen, daß dann auch gilt $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ für alle $x \geq -1$.
Wir schreiben $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$. Nach der Induktionsannahme ist der erste Faktor $(1+x)^n \geq (1+nx)$. Der zweite Faktor $1+x$ ist für $x > -1$ positiv; daher können wir in diesem Fall die Ungleichung damit multiplizieren und erhalten

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx) \cdot (1+x) \,.$$

Diese Ungleichung gilt auch für $x = -1$, denn dann steht auf beiden Seiten die Null. Weiter ist

$$(1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \,,$$

denn $x^2 \geq 0$ für alle x. Somit ist $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ für alle $x \geq -1$.

Dieser Schluß funktioniert für alle $n \in \mathbb{N}$; nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist daher $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

f) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$!

Lösung: Wir können die Behauptung zum Beispiel durch vollständige Induktion beweisen: Als *Induktionsanfang* haben wir für $n = 1$ die Behauptung

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} & = & 1 - \dfrac{1}{2} \\ \| & & \| \\ \dfrac{1}{1 \cdot 2} & = & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Zum *Induktionsschritt* nehmen wir an, die Behauptung sei für ein festes $n \in \mathbb{N}$ richtig und versuchen, sie auch für $n+1$ zu beweisen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &\underset{\text{IA}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ = 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} &= 1 - \frac{1}{n+2}, \end{aligned}$$

wobei das Gleichheitszeichen mit IA darunter bedeuten soll, daß wir hier die Induktionsannahme benutzt haben.

Somit haben wir aus der Richtigkeit der Behauptung für ein festes n auf die Richtigkeit auch für $n+1$ geschlossen, und damit ist die Behauptung bewiesen für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternativ ließe sich diese Behauptung auch direkt beweisen: Wir betrachten $i(i+1)$ als Hauptnenner eines Bruchs mit Nenner i und eines Bruchs mit Nenner $i+1$; nach kurzem Probieren kommt man auf die Formel

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) &\cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

da sich alle anderen Summanden gegenseitig wegheben.

g) Zeigen Sie: Für alle $n \neq 3$ gilt: $n^2 \leq 2^n$!

Lösung: Für $n = 3$ ist $3^2 > 2^3$, die Behauptung also definitiv falsch. Ein Induktionsbeweis kann daher höchstens ab $n = 4$ funktionieren; die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ müssen separat überprüft werden.

Für $n = 1$ haben wir die offensichtlich korrekte Behauptung $1^2 \leq 2^1$; mit $n = 2$ und der Behauptung $2^2 \leq 2^2$ gibt es auch keine Probleme.

Zum Beweis der Formel für $n \geq 4$ starten wir mit dem Induktionsanfang $n = 4$. Hier haben wir die Ungleichung $4^2 \leq 2^4$, bei der auf beiden Seiten 16 steht; die Behauptung ist also richtig.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, sie sei bewiesen für irgendein $n \geq 4$; wir müssen zeigen, daß sie auch für $n+1$ gilt. Nach Induktionsannahme ist

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1\,.$$

Wenn wir wüßten, daß $2n + 1 \leq 2^n$ ist, könnten wir rechts weiter abschätzen durch $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Leider sagt uns unsere Induktionsannahme aber nur etwas über die Größenverhältnisse zwischen n^2 und 2^n. Wir können aber n mit n^2 in Verbindung bringen: Für jede natürliche Zahl n ist $n \leq n^2$. Das reicht nicht; müssen also etwas schärfer abschätzen. Da $n \geq 4$ vorausgesetzt war, ist sogar $4n \leq n^2$, also $n \leq \frac{1}{4}n^2$. Somit ist, wenn wir noch einmal die Induktionsannahme ausnutzen,

$$(n+1)^2 \leq 2^n + \frac{n^2}{2} + 1 \leq 2^n + \frac{1}{2} \cdot 2^n + 1 = 2^n + 2^{n-1} + 1 \leq 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}\,.$$

Genau das wollten wir zeigen; also gilt die Behauptung auch für $n+1$.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion haben wir sie daher für *alle* $n \geq 4$ bewiesen; da sie für $n = 1$ und $n = 2$ richtig ist, gilt sie für alle $n \neq 3$.

h) Die Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ enthalte alle Viererzahlen und mindestens eine ungerade Zahl. Zeigen Sie, daß es dann ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß sowohl n als auch $n+1$ in M liegen.

Lösung: $m = 2k + 1$ sei eine ungerade Zahl aus M. Falls k gerade ist, ist $n = 2k$ eine Vierzahl, liegt also in M, und auch $n + 1 = m \in M$. Ist k ungerade, so ist $k + 1$ gerade, $m + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$ also eine Viererzahl. In diesem Fall können wir daher $n = m$ nehmen.

i) Zeigen Sie: Für keine natürliche Zahl n ist $n^2 - 2$ durch vier teilbar.

Lösung: Ist n eine gerade Zahl, so ist n^2 durch vier teilbar, $n^2 - 2$ also nicht. Ist n ungerade, so auch n^2 und damit auch $n^2 - 2$, so daß diese Zahl erst recht nicht durch vier teilbar sein kann.

j) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis: x, y seien zwei beliebige reelle Zahlen. Wir bilden das arithmetische Mittel $a = \frac{1}{2}(x + y)$; dann gilt offensichtlich $x - 2a = -y$ und auch $x = -y + 2a$. Multiplizieren wir die beiden linken Seiten dieser Gleichungen miteinander, muß das Ergebnis gleich dem Produkt der beiden rechten Seiten sein, d.h. $x^2 - 2ax = y^2 - 2ay$. Addieren wir auf beiden Seiten a^2, können wir jeweils die zweite binomische Formel anwenden und kommen auf $(x-a)^2 = (y-a)^2$. Somit ist $x - a = y - a$ und damit $x = y$.

Lösung: Aus $(x - a)^2 = (y - a)^2$ folgt nicht notwendigerweise, daß $x - a = y - a$ ist; stattdessen könnte auch $x - a = a - y$ sein, was hier auch der Fall ist.

k) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis: x, y seien reelle Zahlen und $x = y$. Dann ist auch $x^2 = xy$, also $x^2 - y^2 = xy - y^2$. Nach der dritten binomischen Formel folgt, daß $(x + y)(x - y) = y(x - y)$ ist, also $x + y = y$. Wegen $x = y$ ist also $2y = y$ und damit $2 = 1$.

Lösung: Das Kürzen durch $x - y$ ist nur möglich, wenn dieser Term von der Null verschieden ist; hier ist aber $x = y$ vorausgesetzt.

l) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis: Wir zeigen durch vollständige Indultion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Für zwei natürliche Zahlen $a, b \leq n$ ist $a = b$. Der Induktionsanfang ist klar: Für $n = 1$ muß $a = b = 1$ sein. Nun nehmen wir an, die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen und betrachten zwei natürliche Zahlen a, b mit $a, b \leq n + 1$. Da $a - 1$

und $b-1$ beide kleiner oder gleich n sind, ist nach Induktionsannahme $a-1=b-1$, also $a=b$. Damit ist die Behauptung für alle $n\in\mathbb{N}$ bewiesen, d.h. je zwei natürliche Zahlen sind gleich.

Lösung: Im Induktionsschritt müssen $a-1$ und $b-1$ keine natürlichen Zahlen sein, sondern können auch Null sein. Damit läßt sich die Induktionsannahme nicht anwenden.

m) Zeigen Sie: Ist beim Algorithmus von Heron $x_n^2=a$ für irgendein $n\geq 1$, so war bereits $x_0^2=a$.

Lösung: Falls

$$\begin{aligned} x_n^2-a &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)^2-a=\frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2+2a+\frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right)-a \\ &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2-2a+\frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right)=\frac{1}{4}\left(x_{n-1}-\frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \end{aligned}$$

verschwindet, muß auch der Inhalt der letzten Klammer verschwinden, d.h. $x_{n-1}=\dfrac{a}{x_{n-1}}$.
Durch Multiplikation dieser Gleichung mit x_{n-1} folgt, daß bereits $x_{n-1}^2=a$ ist.
Nun ist im Prinzip klar, wie es weitergeht: Falls $n-1\geq 1$ ist, können wir nach dem gleichen Schema zeigen, daß auch $x_{n-2}^2=a$ ist und so weiter, bis wir bei $x_0^2=a$ angelangt sind.
Um daraus einen exakten Beweis zu machen, können wir beispielsweise folgendermaßen vorgehen: Wir definieren $m\in\mathbb{N}_0$ als die kleinste Zahl, für die $x_m^2=a$ ist. Da $x_n^2=a$ vorausgesetzt war, gibt es auf jeden Fall so eine Zahl; wir müssen zeigen, daß sie gleich Null ist.
Angenommen, $m>0$. Dann können wir die obige Rechnung mit m an Stelle von n durchführen und erhalten die Gleichung $x_{m-1}^2=a$, im Widerspruch zur vorausgesetzten Minimalität von m. Somit muß $m=0$ sein.

n) Berechnen Sie nach dem Verfahren von Heron einen Näherungswert für $\sqrt{10}$, indem Sie ausgehend vom Startwert $x_0=3$ zwei Iterationen durchführen! Wie genau kennen Sie nun den Wert von $\sqrt{10}$?

Lösung: Mit $x_0=3$ ist

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(3+\frac{10}{3}\right)=\frac{19}{6}=3{,}1\overline{6} \qquad \text{und} \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{19}{6}+\frac{10\cdot 6}{19}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{19^2+10\cdot 6^2}{6\cdot 19}=\frac{721}{228}\approx 3{,}162280701754\,. \end{aligned}$$

Wir wissen, daß $\sqrt{10}$ zwischen $10/x_2$ und x_2 liegen muß, d.h.

$$\frac{2280}{721}<\sqrt{10}<\frac{721}{228} \quad \text{oder} \quad 3{,}162274618585<\sqrt{10}<3{,}162280701755\,.$$

Wir kennen die Zahl also mit einem Fehler von weniger als 10^{-5}.