WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15–17. September 2014

a) Zeigen Sie, daß es keine rationale Zahl x gibt mit $x^2 = 10$!

b) Zeigen Sie, daß es keine rationale Zahl x gibt mit $x^3 = 3$!

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß die Summe der ersten n Quadratzahlen nach der Formel

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

berechnet werden kann!

d) Berechnen Sie die Summe der Quadrate der ersten n ungeraden Zahlen!

e) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Abschwächung der BERNOULLIschen Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \geq -1\,.$$

f) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$!

g) Zeigen Sie: Für alle $n \neq 3$ gilt: $n^2 \leq 2^n$!

h) Die Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ enthalte alle Viererzahlen und mindestens eine ungerade Zahl. Zeigen Sie, daß es dann ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß sowohl n als auch $n+1$ in M liegen.

i) Zeigen Sie: Für keine natürliche Zahl n ist $n^2 - 2$ durch vier teilbar.

j) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis: x, y seien zwei beliebige reelle Zahlen. Wir bilden das arithmetische Mittel $a = \frac{1}{2}(x+y)$; dann gilt offensichtlich $x - 2a = -y$ und auch $x = -y + 2a$. Multiplizieren wir die beiden linken Seiten dieser Gleichungen miteinander, muß das Ergebnis gleich dem Produkt der beiden rechten Seiten sein, d.h. $x^2 - 2ax = y^2 - 2ay$. Addieren wir auf beiden Seiten a^2, können wir jeweils die zweite binomische Formel anwenden und kommen auf $(x-a)^2 = (y-a)^2$. Somit ist $x - a = y - a$ und damit $x = y$.

k) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis: x, y seien reelle Zahlen und $x = y$. Dann ist auch $x^2 = xy$, also $x^2 - y^2 = xy - y^2$. Nach der dritten binomischen Formel folgt, daß $(x+y)(x-y) = y(x-y)$ ist, also $x + y = y$. Wegen $x = y$ ist also $2y = y$ und damit $2 = 1$.

l) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis: Wir zeigen durch vollständige Indultion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Für zwei natürliche Zahlen $a, b \leq n$ ist $a = b$. Der Induktionsanfang ist klar: Für $n = 1$ muß $a = b = 1$ sein. Nun nehmen wir an, die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen und betrachten zwei natürliche Zahlen a, b mit $a, b \leq n+1$. Da $a - 1$ und $b - 1$ beide kleiner oder gleich n sind, ist nach Induktionsannahme $a - 1 = b - 1$, also $a = b$. Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, d.h. je zwei natürliche Zahlen sind gleich.

m) Zeigen Sie: Ist beim Algorithmus von HERON $x_n^2 = a$ für irgendein $n \geq 1$, so war bereits $x_0^2 = a$.

n) Berechnen Sie nach dem Verfahren von HERON einen Näherungswert für $\sqrt{10}$, indem Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 3$ zwei Iterationen durchführen! Wie genau kennen Sie nun den Wert von $\sqrt{10}$?