WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 8.–10. September 2014

a) Bestimmen Sie für die Mengen

$$A = \{1, 2, 4, 7, 10, 14, 18, 23\} \quad \text{und} \quad B = \{1, 3, 6, 10, 15, 23, 30\}$$

Durchschnitt, Vereinigung sowie die beiden Differenzen $A \setminus B$ und $B \setminus A$!

Lösung: Die Vereinigung $A \cup B$ besteht aus allen Elementen, die in mindestens einer der beiden Mengen liegen, also ist

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 14, 15, 18, 23, 30\} .$$

Der Durchschnitt $A \cap B$ enthält nur die Elemente, die in *beiden* Mengen liegen, also ist

$$A \cap B = \{1, 10, 23\} .$$

Die Differenz $A \setminus B$ enthält alle Elemente, die in A, nicht aber in B liegen; somit ist

$$A \setminus B = \{2, 4, 7, 14, 18\} \quad \text{und entsprechend} \quad B \setminus A = \{3, 6, 15, 30\} .$$

b) Richtig oder falsch: Für zwei Mengen A, B gilt $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist für die Mengen aus dem vorigen Beispiel

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{2, 3, 4, 6, 7, 14, 15, 18, 30\}$$

verschieden von $A \cup B$: Die Elemente $1, 10, 23$ fehlen. (Eine richtige Formel wäre

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) ,$$

aber danach war nicht gefragt.)

c) Richtig oder falsch: Für zwei Mengen A, B gilt $A \cup (A \cap B) = A$.

Lösung: *Richtig,* denn jedes Element von $A \cap B$ liegt insbesondere in A, so daß bei der Bildung der Vereinigung keine neuen Elemente dazukommen.

d) Richtig oder falsch: Für vier Mengen A, B, C, D gilt stets

$$(A \cap B) \cap (C \cap D) = (A \cap C) \cap (B \cap D) .$$

Lösung: *Richtig:* $A \cap B$ besteht aus allen Elementen, die sowohl in A als auch in B liegen, $C \cap D$ aus denen, die sowohl in C als auch in D liegen. $(A \cap B) \cap (C \cap D)$ enthält entsprechend alle Elemente, die sowohl in $A \cap B$ als auch in $C \cap D$ liegen, also genau die, die jeder der vier Mengen A, B, C, D liegen. Dieselbe Art von Argument zeigt, daß auch $(A \cap C) \cap (B \cap D)$ genau diese Elemente enthält; also sind die beiden Mengen gleich.

e) Richtig oder falsch: Die Menge aller Zehnerzahlen aus $\mathbb{N}$ ist eine Teilmenge der Menge aller gerader Zahlen.

Lösung: *Richtig,* denn jede Zehnerzahl ist gerade.

f) Richtig oder falsch: Die Menge aller Quadrate natürlicher Zahlen ist eine Teilmenge der Menge alle vierter Potenzen natürlicher Zahlen.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist vier zwar eine Quadratzahl, läßt sich aber nicht als vierte Potenz einer natürlichen Zahl schreiben.

g) G sei die Menge aller gerader ganzer Zahlen, D die Menge aller durch drei teilbarer ganzer Zahlen. Was ist $G \cap D$?

Lösung: Im Durchschnitt $G \cap D$ liegen alle ganzen Zahlen, die sowohl gerade als auch durch drei teilbar sind, die also sowohl durch zwei als auch durch drei teilbar sind. Somit ist

$$G \cap D = \left\{ z \in \mathbb{Z} \;\middle|\; z \text{ ist durch sechs teilbar} \right\}$$

die Menge aller Sechserzahlen.

h) Welche Elemente hat die Menge

$$A = \left\{ z \in \mathbb{Z} \;\middle|\; z \le 20 \text{ und } z \text{ ist Quadratzahl} \right\} ?$$

Lösung: Die einzigen Quadratzahlen kleiner oder gleich zwanzig sind $0, 1, 4, 9$ und 16, also ist $A = \{0, 1, 4, 9, 16\}$.

i) *Richtig oder falsch:* Für zwei beliebige Mengen A, B ist stets $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Lösung: *Richtig,* denn $A \setminus B$ besteht genau aus den Elementen von A, die nicht in B liegen, und ein Element von A liegt genau dann nicht in B, wenn es nicht in $A \cap B$ liegt, denn es liegt ja auf jeden Fall in A.

j) A und B seien zwei Teilmengen einer Menge M, d.h. jedes Element von A liegt auch in M und genauso jedes Element von B. Zeigen Sie: Dann ist $(M \setminus A) \cup (M \setminus B) = M \setminus (A \cap B)$.

Lösung: Ein Element $x \in M$ liegt genau dann in $M \setminus A$, wenn es nicht in A liegt, und es liegt genau dann in $M \setminus B$, wenn es nicht in B liegt. Somit liegt es genau dann in $(M \setminus A) \cup (M \setminus B)$ wenn es in mindestens einer der beiden Mengen A, B nicht enthalten ist. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn x nicht im Durchschnitt von A und B liegt, denn der besteht ja aus allen Elementen, die sowohl in A als auch in B liegen. Die Elemente von M, die nicht im Durchschnitt $A \cap B$ liegen, sind genau die von $M \setminus (A \cap B)$, also haben $(M \setminus A) \cup (M \setminus B)$ und $M \setminus (A \cap B)$ dieselben Elemente und sind somit gleich.

k) *Richtig oder falsch:* Die Menge aller rationaler Zahlen mit ungeradem Nenner ist (mit der üblichen Addition und Multiplikation) ein Körper.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise gibt es für $a = \frac{2}{3}$ keinen Bruch a'' mit ungeradem Nenner, für den $aa'' = 1$ ist, denn alle Darstellungen von $\frac{3}{2}$ haben geraden Nenner. (Die Existenz von multiplikativen Inversen ist übrigens das einzige Körperaxiom, das nicht erfüllt ist; man überlegt sich leicht, daß es mit den anderen keine Probleme gibt.)

l) Zeigen Sie, daß für je vier Elemente a, b, c, d eines Körpers gilt $(ab)(cd) = (ac)(bd)$!

Lösung: Wir formen die linke Seite um nach dem Assoziativ- und dem Kommutativitätsgesetz der Multiplikation; der Kürze halber soll dabei eine Nummer unter dem Gleichheitszeichen bedeuten, daß die rechte Seite durch Anwendung des entsprechenden Körperaxioms aus der linken hervorgeht. Teilprodukte, die für die Anwendung des Assoziativgesetzes als ein einziges Körperelement betrachtet werden, sind auf der linken Seite des Gleichheitszeichens unterstrichen:

$$\underline{(ab)}(cd) \underset{\text{II.1}}{=} \big((ab)c\big)d \underset{\text{II.1}}{=} \big(a(bc)\big)d \underset{\text{II.4}}{=} \big(a(cb)\big)d \underset{\text{II.1}}{=} \big(\underline{(ac)}b\big)d \underset{\text{II.1}}{=} (ac)(bd)$$

m) Zeigen Sie, daß das Element $a' \in k$ mit $a + a' = 0$ in einem Körper k eindeutig bestimmt ist!

Lösung: Wir betrachten irgendein Element $a^* \in k$, für das $a + a^* = 0$ ist. Nach den Körperaxiomen gilt dann

$$a' \underset{\text{I.2}}{=} a' + 0 = a' + (a + a^*) \underset{\text{I.1}}{=} (a' + a) + a^* \underset{\text{I.4}}{=} (a + a') + a^* \underset{\text{I.3}}{=} 0 + a^* \underset{\text{I.2}}{=} a^* .$$

n) Zeigen Sie, daß in jedem Körper $(-1) \cdot (-1) = 1$ ist!

Lösung: Nach dem Distributivgesetz ist

$$(-1)\big(1 + (-1)\big) = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = (-1) + (-1) \cdot (-1) .$$

Somit ist $(-1) \cdot (-1)$ das nach der vorigen Aufgabe eindeutig bestimmte additive Inverse zu -1; wegen $(-1) + 1 = 0$ ist das die Eins.

o) Zeigen Sie, daß in jedem Körper k gilt: $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ für alle $a, b \in k$!

Lösung:

$$0 = a \cdot 0 = a \cdot \big((-b) + b\big) \underset{\text{III}}{=} a \cdot (-b) + a \cdot b ;$$

daher ist $a \cdot (-b)$ das eindeutig bestimmte additive Inverse zu $a \cdot b$, also gleich $-(a \cdot b)$.

p) Zeigen Sie, daß in jedem Körper $(-a) \cdot (-a) = a \cdot a$ gilt!

Lösung: Nach der vorigen Aufgabe ist $a \cdot (-a) = -(a \cdot a)$, also nach dem Kommutativgesetz auch $(-a) \cdot a = -(a \cdot a)$. Außerdem ist nach dem Distributivgesetz

$$(-a) \cdot \big(a + (-a)\big) = (-a) \cdot a + (-a) \cdot (-a) ;$$

andererseits steht links $(-a) \cdot 0$, und das ist, wie wir in der Vorlesung gesehen haben, gleich null. Somit sind sowohl $a \cdot a$ als auch $(-a) \cdot (-a)$ invers zu $(-a) \cdot a$, also gleich.

q) Zeigen Sie, daß für jedes Element a eines Körpers k gilt: $a + a = 2 \cdot a$, wobei „2" für das Element $1 + 1 \in k$ stehen soll!

Lösung: Nach II,2 ist $a = a \cdot 1$, also ist

$$a + a = a \cdot 1 + a \cdot 1 = a \cdot (1 + 1) = a \cdot 2$$

nach dem Distributivgesetz III. Nach dem Kommutativgesetz II.4 der Multiplikation ist das gleich $2 \cdot a$.

r) Zeigen Sie, daß die erste binomische Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ für beliebige Elemente eines beliebigen Körpers k gilt und folgern Sie daraus mit möglichst geringem Aufwand, daß auch die zweite binomische Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$ gilt!

Lösung: Nach Definition des Quadrats ist $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$. Das wiederum ist nach dem Distributivgesetz III gleich $(a+b) \cdot a + (a+b) \cdot b$. Nach dem Kommutativgesetz I.4 der Multiplikation ist dies gleich $a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b$ und damit auch gleich $a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b$. Statt $a \cdot a$ und $b \cdot b$ können wir auch a^2 und b^2 schreiben, und nach der vorigen Aufgabe ist $a \cdot b + a \cdot b = 2 \cdot a \cdot b$. Also ist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 .$$

Für die zweite binomische Formel beachten wir, daß es nach dem Körperaxiom I.3 zu b ein Element b' gibt mit $b + b' = 0$; wir schreiben dieses in der üblichen Weise als $-b$. Damit ist

$$\big(a - b\big)^2 = \big(a + (-b)\big)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 .$$

Nach dem Distributivgesetz ist

$$2a\big(b + (-b)\big) = 2ab + 2a(-b)\,;$$

wie wir aus einer der vorigen Aufgaben wissen, ist $2a(-b) = -(2ab)$, nach einer anderen ist $(-b) \cdot (-b) = b \cdot b$. Somit ist

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\,.$$

s) k sei ein Körper, in dem $1 + 1 \neq 0$ ist. Beweisen Sie, daß für je zwei Elemente $x, y \in k$ gilt

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy\,!$$

Lösung: Da $1 + 1 = 2$ nicht verschwindet, können wir durch zwei dividieren; nach der ersten binomischen Formel (und den Regeln der Bruchrechnung) ist

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{x^2+2xy+y^2}{4}\,;$$

nach der zweiten entsprechend

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{x^2-2xy+y^2}{4}\,.$$

Subtrahiert man die beiden Formeln voneinander, führt dies auf die Differenz

$$\frac{(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)}{4} = \frac{4xy}{4} = xy\,.$$