WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
*Tel.* 2515

# Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 8.–10. September 2014

*a)* Bestimmen Sie für die Mengen

$$A = \{1, 2, 4, 7, 10, 14, 18, 23\} \quad \text{und} \quad B = \{1, 3, 6, 10, 15, 23, 30\}$$

Durchschnitt, Vereinigung sowie die beiden Differenzen $A \setminus B$ und $B \setminus A$ !

*b)* *Richtig oder falsch:* Für zwei Mengen $A, B$ gilt $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$ .

*c)* *Richtig oder falsch:* Für zwei Mengen $A, B$ gilt $A \cup (A \cap B) = A$.

*d)* *Richtig oder falsch:* Für vier Mengen $A, B, C, D$ gilt stets

$$(A \cap B) \cap (C \cap D) = (A \cap C) \cap (B \cap D) .$$

*e)* *Richtig oder falsch:* Die Menge aller Zehnerzahlen aus $\mathbb{N}$ ist eine Teilmenge der Menge aller gerader Zahlen.

*f)* *Richtig oder falsch:* Die Menge aller Quadrate natürlicher Zahlen ist eine Teilmenge der Menge alle vierter Potenzen natürlicher Zahlen.

*g)* $G$ sei die Menge aller gerader ganzer Zahlen, $D$ die Menge aller durch drei teilbarer ganzer Zahlen. Was ist $G \cap D$ ?

*h)* Welche Elemente hat die Menge

$$A = \bigl\{z \in \mathbb{Z} \bigm| z \leq 20 \text{ und } z \text{ ist Quadratzahl}\bigr\} \text{ ?}$$

*i)* *Richtig oder falsch:* Für zwei beliebige Mengen $A, B$ ist stets $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

*j)* $A$ und $B$ seien zwei Teilmengen einer Menge $M$, d.h. jedes Element von $A$ liegt auch in $M$ und genauso jedes Element von $B$. Zeigen Sie: Dann ist $(M \setminus A) \cup (M \setminus B) = M \setminus (A \cap B)$.

*k)* *Richtig oder falsch:* Die Menge aller rationaler Zahlen mit ungeradem Nenner ist (mit der üblichen Addition und Multiplikation) ein Körper.

*l)* Zeigen Sie, daß für je vier Elemente $a, b, c, d$ eines Körpers gilt $(ab)(cd) = (ac)(bd)$ !

*m)* Zeigen Sie, daß das Element $a' \in k$ mit $a + a' = 0$ in einem Körper $k$ eindeutig bestimmt ist!

*n)* Zeigen Sie, daß in jedem Körper $(-1) \cdot (-1) = 1$ ist!

*o)* Zeigen Sie, daß in jedem Körper $k$ gilt: $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ für alle $a, b \in k$!

*p)* Zeigen Sie, daß in jedem Körper $(-a) \cdot (-a) = a \cdot a$ gilt!

*q)* Zeigen Sie, daß für jedes Element $a$ eines Körpers $k$ gilt: $a + a = 2 \cdot a$, wobei „2“ für das Element $1 + 1 \in k$ stehen soll!

*r)* Zeigen Sie, daß die erste binomische Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ für beliebige Elemente eines beliebigen Körpers $k$ gilt und folgern Sie daraus mit möglichst geringem Aufwand, daß auch die zweite binomische Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$ gilt!

*s)* $k$ sei ein Körper, in dem $1 + 1 \neq 0$ ist. Beweisen Sie, daß für je zwei Elemente $x, y \in k$ gilt

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy \text{ !}$$