

21. November 2014

12. Übungsblatt Analysis I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Sind f und g differenzierbare Funktionen und ist $f + g$ und $f - g$ analytisch, so sind auch f und g analytisch.
- 2) Zeigen Sie: Die Menge M aller reeller Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, die für vorgegebenes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ der Rekursionsvorschrift $a_k = \alpha a_{k-1} + \beta a_{k-2}$ genügen, ist ein \mathbb{R} -Vektorraum, d.h. für je zwei Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ aus M und zwei beliebige reelle Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ liegt auch $(\lambda a_k + \mu b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ in M .
- 3) *Richtig oder falsch:* Ist $f'''(x) = -f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist $f(x)$ darstellbar in der Form $a \sin x + b \cos x$.
- 4) Zeigen Sie: $f(x) = e^{-2x} \cos 3x$ erfüllt eine Beziehung der Form $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$!
- 5) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von 2^i !

Aufgabe 6: (7 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Die n -te Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x}$ ist $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$!
- b) Berechnen Sie die TAYLOR-Reihe von $g(x) = \log x$ um $x = 1$!
- c) Zeigen Sie, daß diese Reihe für $h = 1$ konvergiert!
- d) Welchen Grenzwert hat die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$?

Aufgabe 7: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie mit Hilfe der EULERSchen Formeln, daß $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ist!
- b) Bestimmen Sie die TAYLOR-Reihe von $\sin x \cos x$ um den Nullpunkt!
- c) Bestimmen Sie die TAYLOR-Reihe von $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 5$ um $x = 1$!

Aufgabe 8: (4 Punkte)

Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch die Bedingungen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}.$$

Finden Sie eine geschlossene Formel für a_k !

Abgabe bis zum Freitag, dem 28. November 2014, um 12.00 Uhr