Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

24. Oktober 2014

8. Übungsblatt Analysis I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so ist das Bild eines jeden abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ wieder ein abgeschlossenes Intervall.

2) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so ist das Bild eines jeden offenen Intervalls (a, b) wieder ein offenen Intervall.

3) *Richtig oder falsch:* Es gibt eine reelle Zahl x_M im offenen Intervall $(-1, 1)$, so daß die Funktion $f(x) = 1 - |x|$ dort ihr Maximum annimmt.

4) *Richtig oder falsch:* Es gibt eine reelle Zahl x_M im offenen Intervall $(-1, 1)$, so daß die Funktion $f(x) = 1 - |x|$ dort ihr Minimum annimmt.

5) Was ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$?

Aufgabe 6: *(7 Punkte)*
In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen definiert, und in welchen davon sind sie stetig?

a) $f(x) = e^{e^x + e^{-x} + 1}$ *b)* $g(x) = \left|x^2 - 1\right|$ *c)* $h(x) = \log\left(x^2 - 1\right)$ *d)* $k(x) = \log\left(\log x\right)$

e) $\ell(x) = \dfrac{1}{x^3 - x}$ *f)* $p(x) = \begin{cases} e^x & \text{falls } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ *g)* $q(x) = \begin{cases} e^{x^2 - 1} & \text{falls } |x| \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{falls } 1 < |x| < 2 \\ 3 + \frac{4}{x} & \text{falls } |x| \geq 2 \end{cases}$

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß das Polynom $x^3 - 2x^2 - x + 1$ zwischen $x = -2$ und $x = 3$ mindestens eine Nullstelle hat!

b) Tatsächlich gibt es dort sogar drei Nullstellen. Finden Sie drei Intervalle $[a_i, b_i]$ mit ganzzahligen Grenzen, die jeweils genau eine dieser Nullstellen enthalten!

Aufgabe 8: *(4 Punkte)*

a) $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen und $[a, b] \subset D$. Zeigen Sie: Ist $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$, so gibt es ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = g(x)$.

b) Zeigen Sie: Es gibt eine positive reelle Zahl x mit $2^x = x^4$.

c) Finden Sie eine natürliche Zahl n, so daß $n < x < n + 1$ ist!

Abgabe bis zum Freitag, dem 31. Oktober 2014, um 12.00 Uhr