

26. September 2014

4. Übungsblatt Analysis I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Die Mengen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und \mathbb{N} sind gleichmächtig.
- 2) *Richtig oder falsch:* Alle nicht abzählbaren unendlichen Mengen sind gleichmächtig.
- 3) *Richtig oder falsch:* Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen komplexer Zahlen, die gegen Null konvergieren, so konvergiert auch die Folge der $a_n + b_n$ gegen Null.
- 4) *Richtig oder falsch:* Konvergiert die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n \in \mathbb{C}$ gegen $c \in \mathbb{C}$, so konvergiert die Folge der \bar{c}_n gegen \bar{c} .
- 5) *Richtig oder falsch:* Das Kommutativgesetz der Addition und das der Multiplikation gelten auch für Gleitkommazahlen.

Aufgabe 6: (6 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau ein $k \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{2}k(k-1) < n \leq \frac{1}{2}k(k+1).$$

- b) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen k, ℓ mit $\ell \leq k$, so daß $n = \frac{1}{2}k(k-1) + \ell$ ist.
- c) Folgern Sie, daß es zu jeder natürlichen Zahl n eindeutig bestimmte natürliche Zahlen m, ℓ gibt, so daß $n = \frac{1}{2}(m+\ell-1)(m+\ell-2) + \ell$ ist!
- d) \mathbb{N}^2 sei die Menge aller Paare (n, m) von natürlichen Zahlen. Zeigen Sie, daß \mathbb{N}^2 gleichmächtig zu \mathbb{N} ist!
- e) \mathbb{Q}^2 sein die Menge aller Paare (p, q) von rationalen Zahlen. Zeigen Sie, daß \mathbb{Q}^2 abzählbar ist!

Aufgabe 7: (3 Punkte)

Berechnen Sie in einem Gleitkommasystem mit einer Mantisse aus drei Dezimalstellen und Exponenten zwischen -3 und $+3$ für $a = 0,889$, $b = 0,888$ und $c = 200$ die beiden Gleitkommazahlen $x = (a - b)c$ und $y = ac - bc$, wobei alle Zwischenergebnisse jeweils zur nächsten darstellbaren Zahl gerundet werden sollen. (Für die Berechnung von y gilt, wie üblich, daß Multiplikationen vor Addition und Subtraktion ausgeführt werden; ausführlicher geschrieben ist also $y = (ac) - (bc)$.)

Aufgabe 8: (6 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der hier angegebenen Vorschriften konvergente Folgen definieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert!

$$a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad b_n = \frac{n^2}{n+1}, \quad c_n = \frac{n+1}{n}$$

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 2. Oktober 2014, um 17 Uhr