

12. September 2014

2. Übungsblatt Analysis I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß $n < 2^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$!
- 2) *Richtig oder falsch:* Es gibt eine rationale Zahl x mit $x^4 = 2$.
- 3) Welchen Durchschnitt haben die beiden halboffenen Intervalle $[a, b)$ und $(a, b]$?
- 4) *Richtig oder falsch:* $M \subseteq \mathbb{N}$ enthalte zwar die Eins, nicht aber die Drei. Dann gibt es ein $m \in M$, für das $m + 1$ nicht in M liegt.
- 5) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist entweder n oder $n^2 - 1$ durch drei teilbar.

Aufgabe 6: (5 Punkte)

Finden Sie die Fehler in den folgenden Beweisen:

- a) x und y seien zwei rationale Zahlen und $x^2 = y^2$. Dann ist $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 0$. Kürzen durch $x + y$ zeigt, daß dann auch $x - y$ verschwindet, d.h. $x = y$.
- b) Um zu beweisen, daß alle Hörer der Vorlesung Analysis I das gleiche Gewicht haben, zeigen wir durch vollständige Induktion, daß in jeder Gruppe aus höchstens n Studenten die Gewichte gleich sind: Für $n = 1$ ist das trivial; für den Induktionsschritt nehmen wir an, daß wir die Behauptung für ein festes n bereits bewiesen haben und betrachten eine Gruppe aus höchstens $n + 1$ Studenten. Wenn wir den Kleinsten aus der Gruppe ausschließen, haben alle übrigen nach Induktionsannahme das gleiche Gewicht; insbesondere hat also der Größte das gleiche Gewicht wie die anderen. Wenn wir ihn ausschließen und den Kleinsten wieder dazunehmen, haben wir wieder eine Gruppe von höchstens n Studenten; daher hat auch dieser das gleiche Gewicht wie die anderen, d.h. alle Gewichte stimmen überein.

Aufgabe 7: (6 Punkte)

- a) Berechnen Sie für $n = 1, 2, 3$ und 4 die Summe der ersten n ungeraden Zahlen!
- b) Stellen Sie eine allgemeine Vermutung auf, was die Summe der ersten n ungeraden Zahlen sein sollte!
- c) Beweisen Sie die in b) aufgestellte Vermutung durch vollständige Induktion!
- d) Was ist die Summe der ersten n geraden Zahlen
- e) Beweisen Sie, aufbauend aus den aus der Vorlesung bekannten Resultaten, Ihre beiden Formeln auch ohne vollständige Induktion!

Aufgabe 8: (4 Punkte)

Wenden Sie das Verfahren von HERON an um Intervalle zu finden, in denen $\sqrt{5}$ liegen muß! Beginnen Sie mit dem Startwert $x_0 = 2$ und rechnen Sie so lange, bis Sie sicher sind, mindestens drei Nachkommastellen von $\sqrt{5}$ zu kennen!