WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

29. August 2013

Modulklausur Analysis II

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $\|(x,y)\| \underset{\text{def}}{=} |x| + 2\,|y|$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^2$.

Lösung: *Richtig,* denn als Summe von Beträgen kann $\|(x,y)\|$ nie negativ werden und nur dann verschwinden, wenn $x = y = 0$ ist. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\|\lambda(x,y)\| = |\lambda x| + 2\,|\lambda y|$, und das ist gleich $|\lambda| \cdot \|(x,y)\|$. Die Dreiecksungleichung ist erfüllt, da sie für jeden der beiden Beträge gilt.

2) Die erste Zeile der JABOBI-Matrix der differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ enthalte nur Nullen. Was können Sie über f sagen?

Lösung: In der ersten Zeile der JACOBI-Matrix stehen die partiellen Ableitungen der ersten Komponente von f nach den verschiedenen Variablen. Somit ist die erste Komponente von f konstant.

3) Die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(0,0,0) = 10$ nimmt für alle Punkte aus $\mathbb{R}^3$ mit EUKLIDischer Norm größer eins negative Werte an. Zeigen Sie, daß f auf $\mathbb{R}^3$ ein absolutes Maximum hat!

Lösung: Auf der kompakten Menge $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$ nimmt die stetige Funktion f ihr Maximum an. Dieses ist mindestens gleich zehn, da der Nullpunkt in der Menge liegt. Damit ist es insbesondere größer als jeder Funktionswert, den f außerhalb der Menge M annimmt, ist also das Maximum von f auf $\mathbb{R}^3$.

4) Richtig oder falsch: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger, so auch die Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sin f(x)$.

Lösung: *Richtig;* Da $\sin 0 = 0$ ist, ist die Nullstellenmenge von f in der von g enthalten, also umgekehrt auch $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$. Damit liegt der Träger von g im Träger von f, ist also ebenfalls kompakt, und als Hintereinanderausführung zweier stetiger Funktionen ist g auch stetig.

5) Richtig oder falsch: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion, und für zwei reelle Zahlen $a < b$ gelte $f(a) < 0 < f(b)$. Dann konvergiert das NEWTON-Verfahren mit Startwert $x_0 = a$ gegen eine Nullstelle von f im Intervall $(a,\, b)$.

Lösung: *Falsch;* ist etwa $f(x) = x^2 - 1$, so ist $f(0) < 0 < f(1)$, aber schon der erste Iterationsschritt des NEWTON-Verfahrens $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ ist nicht durchführbar, da $f'(0) = 0$ ist.

6) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}\,dx$ durch Anwendung des Satzes von Fubini!

Lösung:

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}\right)^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}\,dx\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-3y^2}\,dy\right) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-3(x^2+y^2)}\,.$$

Durch Übergang zu Polarkoordinaten wird dies zu

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-3r^2}\,r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} -\frac{1}{6}e^{-3r^2}\Big|_0^{\infty}\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{6}\,d\varphi = \frac{\pi}{3}\,.$$

Da das gesuchte Integral einen überall positiven Integranden hat, ist sein Wert die (positive) Quadratwurzel hieraus, also $\sqrt{\pi/3}$. (Die Ableitung von e^{-3r^2} ist $-6re^{-3r^2}$.)

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom vom Grad vier um den Punkt $(0,0)$ für die Funktion $f(x,y) = \left(e^{x^2+y^2}-1\right)\sin(x+y)^2$!

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten. Die Taylor-Reihen

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots \quad \text{und} \quad \sin w = w - \frac{w^3}{6} + \frac{w^5}{120} - \cdots$$

sind (hoffentlich) wohlbekannt.

Setzen wir in der ersten Reihe $z = x^2+y^2$ ein, können höchstens die Summanden Exponent kleiner oder gleich zwei Monome vom Grad höchstens vier liefern; es reicht also, wenn wir das Polynom

$$(x^2+y^2) + \frac{(x^2+y^2)^2}{2}$$

betrachten. Beim Sinus müssen wir die *Reihe* quadrieren; da wir uns im Produkt nur für Terme vom Grad höchstens vier interessieren, genügt es dabei, wenn wir

$$\left(w - \frac{w^3}{6}\right)^2 = w^2 - \frac{w^4}{3} + \frac{w^6}{36}$$

betrachten, wobei der letzte Summand für $w = x+y$ nur Terme vom Grad größer vier liefert. Für uns relevant sind also nur die Terme vom Grad höchstens vier im Produkt

$$\left(x^2+y^2+\frac{(x^2+y^2)^2}{2}\right)\left((x+y)^2 - \frac{(x+y)^4}{3}\right)\,,$$

das sind $(x^2+y^2)(x+y)^2 = (x^2+y^2)(x^2+2xy+y^2) = x^4+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3+y^4$, denn alle anderen Produkte liefern nur Monome vom Grad größer vier. Das gesuchte Taylor-Polynom ist somit $x^4+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3+y^4$.

b) Folgern Sie, daß sowohl der Gradient als auch die Hesse-Matrix von f im Nullpunkt verschwindet!

Lösung: Das TAYLOR-Polynom vom Grad zwei von f um den Nullpunkt ist

$$f(0,0) = \left\langle \nabla f(0,0),\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + (x\ y) H_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Alle diese Terme müssen auch im TAYLOR-Polynom vierten Grades vorkommen; da es dort weder lineare noch quadratische Terme gibt, müssen Gradient und HESSE-Matrix von f im Nullpunkt verschwinden.

c) Hat f im Nullpunkt ein lokales Extremum?

Lösung: $f(0,0) = 0$ und $e^{x^2+y^2} - 1 > 0$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Da auch $\sin(x+y)^2 \geq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, kann f keine negativen Werte annehmen; die Funktion hat im Nullpunkt daher sogar ein absolutes Minimum.

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)

a) Berechnen Sie alle Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y) = x^8 - y^4$ auf $\mathbb{R}^2$!

Lösung: f ist beliebig oft differenzierbar, also können wir mit Gradient und HESSE-Matrix arbeiten.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x^7 \\ -4y^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 56x^6 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich verschwindet der Gradient nur im Nullpunkt, und dort ist auch die HESSE-Matrix gleich der Nullmatrix, gibt uns also keine Information. Trotzdem ist klar, daß der Nullpunkt ein Sattelpunkt ist, denn in x-Richtung geht es aufwärts, in y-Richtung abwärts.

b) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $h(x,y) = \sin x \cos y$ auf $\mathbb{R}^2$!

Lösung: Wir haben

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \cos y \\ -\sin x \sin y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_h(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \end{pmatrix}.$$

Wenn der Gradient verschwindet, muß also $\cos x \cos y = \sin x \sin y = 0$ sein.

Der Sinus verschwindet genau bei den ganzzahligen Vielfachen von π, der Kosinus bei den echt halbzahligen. Somit muß eine der beiden Zahlen x, y ein ganzzahliges Vielfaches von π sein, die andere ein echt halbzahliges.

Für $x = k\pi, y = (2\ell+1)\frac{\pi}{2}$ mit $k, \ell \in \mathbb{Z}$ ist $\sin x = \cos y = 0$, also

$$\begin{aligned} H_h(x,y) &= \begin{pmatrix} 0 & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^k \cdot (-1)^\ell \\ -(-1)^k \cdot (-1)^\ell & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+\ell+1} \\ (-1)^{k+\ell+1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Matrix hat Determinante -1, ist also nicht definit. Somit haben wir an dieses Stellen Sattelpunkte.

Für $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, y = \ell\pi$ mit $k, \ell \in \mathbb{Z}$ ist $\cos x = \sin y = 0$, also

$$\begin{aligned} H_h(x,y) &= \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & 0 \\ 0 & -\sin x \cos y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^k \cdot (-1)^\ell & 0 \\ 0 & -(-1)^k \cdot (-1)^\ell \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{k+\ell+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{k+\ell+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Matrix hat Determinante eins, ist also also genau dann positiv definit, wenn der Eintrag links oben positiv ist, und negativ definit, wenn er negativ ist.

Sind also k und ℓ beide gerade oder beide ungerade, so ist die HESSE-Matrix negativ definit, und wir haben ein Maximum; ist eine der beiden Zahlen gerade, die andere ungerade, haben wir ein Minimum.

Aufgabe 3: (*8 Punkte*)

Ein Produkt wird aus drei Ressourcen hergestellt, die jeweils 80 Euro, 12 Euro *bzw.* 20 Euro pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{2/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können mit höchstens 24 000 Euro maximal gefertigt werden?

Lösung: Da die Funktion $f(x, y, z) = 50x^{2/5}y^{1/5}z^{2/5}$ bei zwei festgehaltenen Variablen eine monoton wachsende Funktion der dritten ist, wird das Maximum beim Einsatz von genau 24 000 Euro erreicht, die Nebenbedingung ist also

$$g(x, y, z) = 80x + 12y + 20z - 24\,000 = 0\,.$$

Weiter wird das Maximum sicherlich nicht in einem Punkt angenommen, in dem eine der drei Variablen verschwindet, denn dort hat f den Wert null; wir können also beliebig durch x, y, z dividieren.

Der konstante Vektor grad g ist nicht der Nullvektor; im Maximum muß es daher ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, so daß

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 20x^{-3/5}y^{2/5}z^{2/5} \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{2/5} \\ 20x^{2/5}y^{1/5}z^{-3/5} \end{pmatrix} = \lambda \operatorname{grad} g = \lambda \begin{pmatrix} 80 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ist. Also ist dort

$$\lambda = \frac{1}{4}(x^{-3/5}y^{1/5}z^{2/5}) = \frac{1}{6}(5x^{2/5}y^{-4/5}z^{2/5}) = x^{2/5}y^{1/5}z^{-3/5}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner $12x^{3/5}y^{4/5}z^{3/5}$ erhalten wir die Gleichungen $3yz = 10xz = 12xy$. Daraus folgt, daß $y = \frac{10}{3}x$ und $z = 4x$ ist. Einsetzen in die Nebenbedingung führt zu der Gleichung $80x + 40x + 80x = 24\,000$ oder $x = 120$. Somit ist $y = 400$ und $z = 480$. Der Maximalwert ist $f(120, 400, 480) = 50 \cdot 120^{2/5} \cdot \sqrt[5]{400} \cdot 480^{2/5} \approx 13290{,}796$ Somit können maximal 13290 Einheiten produziert werden.

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 24 000 Euro zu erhöhen?

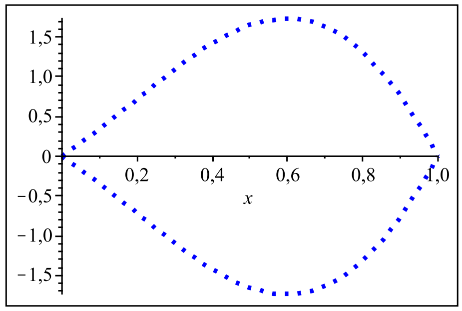
Lösung: Dazu müssen wir $\lambda = x^{2/5}y^{1/5}z^{-3/5} = 120^{2/5}400^{1/5}480^{-3/5} \approx 0{,}554$ berechnen; der entsprechende Grenzpreis ist $1/\lambda \approx 1{,}80576$. Es lohnt sich also ab einem Stückpreis von 1,81 Euro.

Aufgabe 4: (*8 Punkte*)

a) Skizzieren Sie die Menge $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1 \text{ und } |y| < |e^x \sin \pi x|\right\}$!

Lösung:

A ist die Fläche zwischen den beiden Graphen von $y = \pm e^x \sin \pi x$ über den Einheitsintervall $[0, 1]$, wobei die beiden Graphen *nicht* zu A gehören.



b) Bestimmen Sie die Randpunkte und den Abschluß von A!

Lösung: Randpunkte sind genau die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y = \pm e^x \sin 2\pi x$, denn im Falle $y \neq 0$ liegen alle Nachbarpunkte in Richtung der x-Achse in A, die in Gegenrichtung nicht. Im Falle $y = 0$, ist $x = 0$ oder 1, Die linken Nachbarn von $(0, 0)$ und die rechten von $(1, 0)$ liegen nicht in A, die auf der jeweils anderen Seite aber doch.

Der Abschluß von A ist A vereinigt mit dem Rand, also die Menge

$$\overline{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1 \text{ und } |y| \leq |e^x \sin \pi x|\right\}$$

c) Ist A offen? abgeschlossen? beschränkt? kompakt? wegzusammenhängend? zusammenhängend?

Lösung: A ist offen, denn da die beiden Randfunktionen bei $x = 0, \frac{1}{2}$ und 1 verschwinden, enthält A keinen Punkt mit diesen x-Werten, d.h. für jeden Punkt $(x, y) \in A$ liegt x im offenen Intervall $(0, 1)$, und auch y ist nur durch echte Ungleichungen definiert. Daher ist jeder Punkt von A ein innerer Punkt.

A ist nicht abgeschlossen, da es einige seiner Randpunkte, z.B. $(0, 0)$ nicht enthält. Damit ist A auch nicht kompakt, denn jede kompakte Menge ist abgeschlossen. A ist aber beschränkt, denn $|\sin x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $1 \leq e^x \leq e$ für alle $x \in [0, 1]$, so daß die Maximumsnorm eines jeden Punkts von A kleiner als e ist.

A ist nicht wegzusammenhängend und damit auch zusammenhängend, denn zwei Punkte (x_1, y_1) und $(x_2, y_2)) \in A$ lassen sich durch den ganz in A liegenden Streckenzug $(x_1, y_1) \to (x_1, 0) \to (x_2, 0) \to (x_2, y_2)$ miteinander verbinden.

d) Bestimmen Sie die Fläche von A!

Lösung: Wegen der Symmetrie von A zur x-Achse ist das $2 \int\limits_0^1 e^x \sin \pi x \, dx$. Die Stammfunktion des Integranden können wir durch zweimalige partielle Integration bestimmen mit zunächst $u = \sin \pi x$ und $v = v' = e^x$:

$$\int e^x \sin \pi x \, dx = e^x \sin \pi x - \pi \int e^x \cos \pi x \, dx$$
$$= e^x \sin \pi x - \pi \cdot e^x \cos \pi x - \pi^2 \int e^x \sin \pi x \, dx \,.$$

Somit ist $(1 + \pi^2) \int e^x \sin \pi x \, dx = e^x \sin \pi x - \pi e^x \cos \pi x + C$ und

$$F(x) = \int e^x \sin \pi x = \frac{e^x \sin \pi x}{1 + \pi^2} - \frac{\pi \cdot e^x \cos \pi x}{1 + pi^2} + C \,.$$

An der Stelle $x = 0$ hat dieses Funktion für $C = 0$ den Wert $-\pi/(1+\pi^2)$, an der Stelle $x = 1$ entsprechend $\pi e/(1+\pi^2)$. Die Fläche ist also

$$F(1) - F(0) == \frac{\pi(e+1)}{1+\pi^2} .$$

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Berechnen Sie $\int_Q \big(\cos(2x+3y) + x^2y^2\big)$!

Lösung:

$$\int_Q \big(\cos(2x+3y) + x^2y^2\big) = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \big(\cos(2x+3y) + x^2y^2\big)\, dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{\sin(2x+3y)}{3} + \frac{x^2y^3}{3} \right)\bigg|_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sin(2x+3) - \sin(2x-3) + 2x^2}{3}\, dx$$

$$= \frac{-\cos(2x+3)}{6} - \frac{-\cos(2x-3)}{6} + \frac{2x^3}{9}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{-\cos 5 + \cos 1 + \cos(-1) - \cos(-5)}{6} + \frac{4}{9}$$

$$= \frac{\cos 1 - \cos 5}{3} + \frac{4}{9} .$$

b) K sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt. Berechnen Sie

$$\int_K \Big(2\sin(x^2+y^2) + 5\sqrt{x^2+y^2}\Big) !$$

Lösung: Hier arbeiten wir am besten mit Polarkoordinaten. In diesen ausgedrückt ist der Integrand $2\sin r^2 + 5r$, und die Kreisscheibe besteht aus allen Punkten (r, φ) mit $0 \le r \le 1$. Somit ist

$$\int_K 2\sin(x^2+y^2) + \sqrt{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \big(2\sin r^2 + 5r\big) \cdot r\, dr \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \big(2r\sin r^2 + 5r^2\big)\, dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(-\cos r^2 + \frac{5}{3}r^3\right)\bigg|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos 1 + \frac{5}{3}\right)$$

$$= 2\pi(1 - \cos 1 + \frac{5}{3}) ,$$

wobei der Faktor r die Funktionaldeterminante des Übergangs zwischen kartesischen und Polarkoordinaten ist.

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(y) = \int_{-1}^{1} \Big(\cos(xy) + \sin(x^3)\sqrt{1-\cos x^4}\Big)\,dx\,.$$

Zeigen Sie, daß f eine differenzierbare Funktion ist, und stellen Sie $f'(y)$ möglichst einfach dar!

Lösung: Da der Integrand stetig und partiell nach y differenzierbar ist, können wir die Integration über x mit der Differentiation nach y vertauschen und erhalten insbesondere auch, daß die Funktion differenzierbar ist. Bei der Ableitung des Integranden nach y fällt der zweite Summand völlig weg; die des ersten ist nach der Kettenregel $-x\sin(xy)$. Somit ist

$$f'(y) = \int_{-1}^{1} -x\sin(xy)\,dx\,.$$

Durch partielle Integration erhalten wir mit $u = -x$ und $v' = \sin(xy)$, also $v = -\frac{\cos(xy)}{y}$ und $u' = -1$

$$\int -x\sin(xy)\,dx = -\frac{x\cos(xy)}{y} + \int \frac{\cos(xy)}{y}\,dx = \frac{x\cos(xy)}{y} - \frac{\sin(xy)}{y^2} + C$$

Für $x = 1$ wird die rechte Seite zu $\frac{\cos y}{y} - \frac{\sin y}{y^2}$, für $x = -1$ erhalten wir $\frac{-\cos y}{y} + \frac{\sin y}{y^2}$. Die Differenz der beiden Werte ist

$$f'(y) = \frac{2\cos y}{y} - \frac{2\sin y}{y^2}\,.$$

b) Wir haben in der Vorlesung gesehen, daß $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} = \pi$ ist. Bestimmen Sie für $a, b > 0$ den Wert von $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ax^2-by^2}$!

Lösung: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto x/\sqrt{a}, y/\sqrt{b}) \end{cases}$ ist ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$. Seine JACOBI-Matrix ist die Diagonalmatrix mit Einträgen $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$, die Funktionaldeterminante ist also gleich $1/\sqrt{ab}$, und damit ist

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ax^2-by^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}\,.$$