Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

29. August 2013

Modulklausur Analysis II

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $\|(x,y)\| \underset{\text{def}}{=} |x| + 2\,|y|$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^2$.

2) Die erste Zeile der Jabobi-Matrix der differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ enthalte nur Nullen. Was können Sie über f sagen?

3) Die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(0,0,0) = 10$ nimmt für alle Punkte aus $\mathbb{R}^3$ mit Euklidischer Norm größer eins negative Werte an. Zeigen Sie, daß f auf $\mathbb{R}^3$ ein absolutes Maximum hat!

4) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger, so auch die Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sin f(x)$.

5) *Richtig oder falsch:* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion, und für zwei reelle Zahlen $a < b$ gelte $f(a) < 0 < f(b)$. Dann konvergiert das Newton-Verfahren mit Startwert $x_0 = a$ gegen eine Nullstelle von f im Intervall $(a,\ b)$.

6) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}\,dx$ durch Anwendung des Satzes von Fubini!

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom vom Grad vier um den Punkt $(0,0)$ für die Funktion $f(x,y) = \left(e^{x^2+y^2} - 1\right)\sin(x+y)^2$!

b) Folgern Sie, daß sowohl der Gradient als auch die Hesse-Matrix von f im Nullpunkt verschwindet!

c) Hat f im Nullpunkt ein lokales Extremum?

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie alle Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y) = x^8 - y^4$ auf $\mathbb{R}^2$!

b) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $h(x,y) = \sin x \cos y$ auf $\mathbb{R}^2$!

Aufgabe 3: (*8 Punkte*)

Ein Produkt wird aus drei Ressourcen hergestellt, die jeweils 80 Euro, 12 Euro *bzw.* 20 Euro pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{2/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können mit höchstens 24 000 Euro maximal gefertigt werden?

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 24 000 Euro zu erhöhen?

Aufgabe 4: (*8 Punkte*)

a) Skizzieren Sie die Menge $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1 \text{ und } |y| < |e^x \sin \pi x|\right\}$!

b) Bestimmen Sie die Randpunkte und den Abschluß von A !

c) Ist A offen? abgeschlossen? beschränkt? kompakt? wegzusammenhängend? zusammenhängend?

d) Bestimmen Sie die Fläche von A !

Aufgabe 5: (*8 Punkte*)

a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Berechnen Sie $\int_Q \left(\cos(2x + 3y) + x^2y^2\right)$!

b) K sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt. Berechnen Sie

$$\int_K \left(2 \sin(x^2 + y^2) + 5\sqrt{x^2 + y^2}\right) !$$

Aufgabe 6: (*8 Punkte*)

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(y) = \int_{-1}^{1} \left(\cos(xy) + \sin(x^3)\sqrt{1 - \cos x^4}\right) dx .$$

Zeigen Sie, daß f eine differenzierbare Funktion ist, und stellen Sie $f'(y)$ möglichst einfach dar!

b) Wir haben in der Vorlesung gesehen, daß $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} = \pi$ ist. Bestimmen Sie für $a, b > 0$ den Wert von $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ax^2-by^2}$!

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 29. August 2013, um 17^{30} Uhr