WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

10. Juni 2013

Modulklausur Analysis II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Zeigen Sie: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Maximumsnorm eine CAUCHY-Folge von Elementen $x_k \in \mathbb{R}^n$, so auch bezüglich der EUKLIDischen Norm.

Lösung: Da alle Normen auf R^n äquivalent sind, gibt es Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so daß $c_1 \|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le c_2 \|x\|_\infty$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es, da $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Maximumsnorm eine CAUCHY-Folge ist, ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\|x_k - x_\ell\|_\infty < \varepsilon/c_1$ für alle $k, \ell \ge N$. Damit ist für diese Indizes auch $\|x_k - x_\ell\|_2 < \varepsilon$.

2) Die erste Spalte der JABOBI-Matrix der differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ enthalte nur Nullen. Was können Sie über f sagen?

Lösung: In der ersten Spalte der JACOBI-Matrix stehen die partiellen Ableitungen der Komponenten von f nach der ersten Variablen. Somit ist f unabhängig von dieser Variablen.

3) Richtig oder falsch: $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ordne dem Punkt (x, y, z) den Wert $e^{f(x,y,z)}$ zu. Dann haben f und g ihre relativen Maxima in den gleichen Punkten.

Lösung: *Richtig:* (x_0, y_0, z_0) ist genau dann ein relatives Maximum von f, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß für alle Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, die bezüglich einer vorgegebenen Norm höchstens den Abstand ε von (x_0, y_0, z_0) haben, $f(x, y, z) \le f(x_0, y_0, z_0)$ ist. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion gilt das auch noch nach Anwendung der Exponentialfunktion.

4) Richtig oder falsch: Jede Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist beschränkt.

Lösung: *Richtig;* außerhalb ihres Trägers T verschwindet die Funktion, und auf dem Kompaktum T nimmt sie als stetige Funktion sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an, so daß sie durch diese beiden Funktionswerte sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

5) Richtig oder falsch: Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_1 = 0$ und $x_{k+1} = \frac{1}{2}\cos^2 x_k$ für alle $k \ge 1$ konvergiert.

Lösung: *Richtig;* da $\frac{1}{2}\cos^2 x$ nur Werte zwischen Null und $\frac{1}{2}$ annimmt, bildet diese Funktion das Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ auf sich selbst oder eine Teilmenge davon ab, und die Ableitung $-\sin x \cos x = -\frac{1}{2}\sin 2x$ hat (nicht nur) dort überall einen Betrag von höchstens $\frac{1}{2}$, was echt kleiner als eins ist. Nach dem BANACHschen Fixpunktsatz konvergiert die Folge daher gegen den einzigen Fixpunkt der Abbildung im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$.

6) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ LEBESGUE-integrierbar und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist auch die Funktion $1/f$ LEBESGUE-integrierbar auf $\mathbb{R}^n$.

Lösung: *Falsch;* wie wir bei der Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ festgestellt haben, existiert zwar $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}$, aber $\int_{\mathbb{R}^2} e^{x^2+y^2}$ kann nicht existieren, da der Integrand abgesehen von einer Kreisscheibe um den Nullpunkt überall größer als eins ist, der $\mathbb{R}^2$ aber natürlich kein endliches Volumen hat.

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad vier um den Punkt $(0,0)$ für die Funktion $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)\sin(x+y)$!

Hinweis: $\log(1+z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{z^k}{k}$

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten. Die TAYLOR-Reihe des (natürlichen) Logarithmus ist angegeben und

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots$$

ist (hoffentlich) wohlbekannt.

Setzen wir beim Logarithmus $z = x^2 + y^2$ ein, können höchstens die Summanden mit $k \leq 2$ Monome vom Grad höchstens vier liefern; es reicht also, wenn wir das Polynom

$$(x^2+y^2) - \frac{(x^2+y^2)^2}{2}$$

betrachten. Bei $\sin(x+y)$ sind alle potentiell relevanten Monome in den Summanden mit Exponent höchstens drei enthalten. Das gesuchte Polynom besteht somit aus allen Monomen vom Grad höchstens fünf im Produkt

$$\left((x^2+y^2) - \frac{(x^2+y^2)^2}{2}\right)\left((x+y) - \frac{(x+y)^3}{6}\right)$$

enthalten. Da jeder der beiden Summanden des ersten Faktors mindestens Grad zwei hat, können wir den letzten Summanden des zweiten Faktors vergessen und auch den zweiten Summanden des ersten Faktors müssen wir nur mit dem ersten Summanden des zweiten multiplizieren. Wir brauchen also nur

$$(x^2+y^2)(x+y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3\,,$$

und das ist unser gesuchtes TAYLOR-Polynom.

b) Zeigen Sie, daß der Gradient von f im Nullpunkt verschwindet, daß f dort aber weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum hat!

Lösung:

$$f_x(x,y) = \log(1+x^2+y^2)\cos(x+y) + \frac{2x\sin(x+y)}{1+x^2+y^2}$$
$$f_y(x,y) = \log(1+x^2+y^2)\cos(x+y) + \frac{2y\sin(x+y)}{1+x^2+y^2}\;;$$

im Nullpunkt verschwinden offensichtlich beide, denn $\log 1 = 0$. Also verschwindet der Gradient, aber da $f(0,y) = \log(1+y^2)\sin y$ um Null durch das obige TAYLOR-Polynom mit $x = 0$ angenähert wird, also durch y^3, haben wir weder ein Maximum noch ein Minimum.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = 2y^3 - x^3 + 6x^2 - 3xy^2$ auf $\mathbb{R}^2$!

Lösung: f ist beliebig oft differenzierbar, also können wir mit Gradient und HESSE-Matrix arbeiten. Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -3x^2 + 12x - 3y^2) \\ f_y(x,y) &= 6y^2 - 6xy \\ f_{xx}(x,y) &= -6x + 12 \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= -6y \\ f_{yy}(x,y) &= 12y - 6x \end{aligned} \quad .$$

Verschwinden des Gradienten bedeutet, daß insbesondere $f_y(x,y) = 6y^2 - 6xy = 6y(y-x)$ verschwinden muß; also ist entweder $y = 0$ oder $y = x$. Im Falle $y = 0$ ist

$$f_x(x,0) = -3x^2 + 12x = 3x(4-x)\,,$$

also muß $x = 0$ oder $x = 4$ sein. Dies liefert die beiden Kandidaten $(0,0)$ und $(4,0)$.
Im Falle $y = x$ ist $f_x(x,x) = -6x^2 + 12x = 6x(2-x)$; außer dem bereits bekannten Nullpunkt erhalten wir also auch noch den Punkt $(2,2)$ als weiteren Kandidaten.
Die HESSE-Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 12-6x & -6y \\ -6y & 12y-6x \end{pmatrix} ;$$

für $x = y = 0$ ist das die Matrix $\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, die zwar positiv semidefinit, nicht aber positiv definit ist. Da $f(0,y) = y^3$ für betragskleine y sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, liegt hier kein Extremum vor.
Im Punkt $(4,0)$ ist die Matrix gleich $\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$, also offensichtlich negativ definit; in diesem Punkt haben wir daher ein Maximum.
Im Punkt $(2,2)$ schließlich haben wir die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mit Determinante $-12^2 < 0$; diese Matrix ist also indefinit, so daß im Punkt $(2,2)$ ein Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y,z) = x^{1/2}y^{1/3}z^{1/6}$ unter der Nebenbedingung $15x + 30y + 10z \le 180$!

Lösung: Da f in jeder der drei Variablen strikt monoton wächst, kann das Maximum nur in einem Punkt angenommen werden, in dem $15x + 30y + 10z = 180$ ist. Wir suchen also ein Maximum von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = 15x + 30y + 10z - 180 = 0\,.$$

Dort müssen

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/3}z^{1/6} \\ \frac{1}{3}x^{1/2}y^{-2/3}z^{1/6} \\ \frac{1}{6}x^{1/2}y^{1/3}z^{-5/6} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sein; da ∇g nie der Nullvektor sein kann, muß es daher ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, so daß $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ ist. Somit gelten im Maximum die drei Gleichungen

$$x^{-1/2}y^{1/3}z^{1/6} = 30\lambda, \quad x^{1/2}y^{-1/3}z^{1/6} = 90\lambda \quad \text{und} \quad x^{1/2}y^{1/3}z^{-5/6} = 60\lambda\,.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit sechs, die zweite mit zwei und die dritte mit drei, sehen wir, daß

$$6x^{-1/2}y^{1/3}z^{1/6} = 2x^{1/2}y^{-1/3}z^{1/6} = 3x^{1/2}y^{1/3}z^{-5/6} = 180\lambda$$

ist. Multiplikation der ersten drei Formeln mit $x^{1/2}y^{2/3}z^{5/6}$ zeigt, daß dann auch

$$6yz = 2xz = 3xy$$

sein muß.

Da $f(x,y,z)$ verschwindet, sobald eine der Variablen verschwindet, und sonst nur positive Werte annimmt, sind im Maximum alle drei Variablen von Null verschieden; wir können also kürzen und erhalten die beiden Gleichungen $3y = x$ und $2z = x$. Für Punkte,die diese Gleichungen erfüllen, ist

$$g(x,y,z) = 15x + 30y + 10z - 180 = 15x + 10x + 5x - 180 = 30x - 180\,;$$

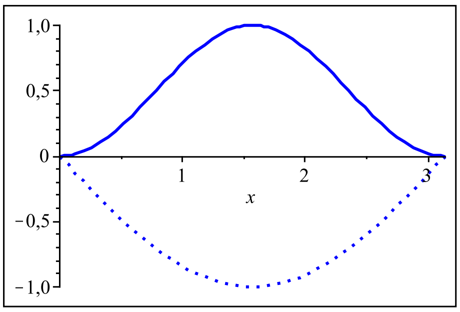
da dies verschwinden soll, muß also $x = 6, y = 2$ und $z = 3$ sein. Der Maximalwert ist $6^{1/2} \cdot 2^{1/3} \cdot 3^{1/6} \approx 3{,}7$.

Aufgabe 4: *(8 Punkte)*

a) Skizzieren Sie die Menge $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi \text{ und } -\sin x < y \le \sin^2 x\}$

Lösung:

A ist die Fläche zwischen dem Graphen von $y = -\sin x$ und dem von $y = \sin^2 x$ für $x \in (0,\pi)$, wobei der letztere Graph zu A gehört, der erstere nicht.



b) Bestimmen Sie die Randpunkte und den Abschluß von A!

Lösung: Randpunkte sind einmal die beiden Punkte $(0,0)$ und $(0,\pi)$, denn ihre Nachbarn auf der x-Achse liegen in der Menge oder auch nicht, je nachdem, ob sie links oder rechts vom Punkt liegen. Außerdem sind alle Punkte auf dem Graphen Randpunkte; hier hängt die Zugehörigkeit eines benachbarten Punktes zu A davon ab, ob er über oder unter dem Graphen liegt.

c) Ist A offen? abgeschlossen? beschränkt? kompakt? wegzusammenhängend? zusammenhängend?

Lösung: A ist nicht offen, da es einige seiner Randpunkte enthält, nämlich die mit $y = \sin^2 x$ und $x \in (0, \pi)$; eine offene Menge hat nur innere Punkte.

A ist nicht abgeschlossen, da es einige seiner Randpunkte, z.B. $(0,0)$ nicht enthält. Damit ist A auch nicht kompakt, denn jede kompakte Menge ist abgeschlossen. A ist aber beschränkt, denn $|\sin x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so daß die Maximumsnorm eines jeden Punkts von A kleiner als π ist.

A ist offensichtlich wegzusammenhängend und damit erst recht auch zusammenhängend: Um vom Punkt $(x_1, y_1) \in A$ zu $(x_2, y_2) \in A$ zu kommen, kann man beispielsweise den Streckenzug von (x_1, y_1) über $(x_1, 0)$ und $(x_2, 0)$ nach (x_2, y_2) nehmen.

d) Bestimmen Sie die Fläche von A!

Lösung: Die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $y = \sin^2 x$ ist das Integral über diese Funktion zwischen 0 und π.

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2};$$

daher ist

$$\int_0^\pi \sin^2 \, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Die Fläche zwischen $y = -\sin x$ und der x-Achse ist gleich der zwischen der x-Achse und der Sinuslinie über $[0, \pi]$, also

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

Die Fläche von A ist somit gleich $2 + \frac{1}{2}\pi$.

Aufgabe 5: (*8 Punkte*)

a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Berechnen Sie $\int_Q (x^4 + xy + y^4)$!

Lösung:

$$\int_Q (x^4 + xy + y^4) = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} (x^4 + xy + y^4)\, dy\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 y + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(2x^4 + \frac{2}{5}\right) dx = \frac{2x^5 + 2x}{5}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{5}.$$

b) K sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt. Berechnen Sie $\int_K \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$!

Lösung: Hier arbeiten wir am besten mit Polarkoordinaten; in diesen ausgedrückt ist der Integrand $\frac{\sin r}{r}$, und die Kreisscheibe besteht aus allen Punkten (r, φ) mit $0 \leq r \leq 1$.

Somit ist

$$\int_K \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{\sin r}{r}\cdot r\,dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sin r\,dr\right)d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}(-\cos 1 + 1)\,d\varphi = 2\pi(1-\cos 1)\,,$$

wobei der Faktor r die Funktionaldeterminante des Übergangs zwischen kartesischen und Polarkoordinaten ist.

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(y) = \int_{-1}^{1}\left(ye^{-xy} + e^{-x^4}\sqrt{1-\sin x}\right)dx\,.$$

Zeigen Sie, daß f eine differenzierbare Funktion ist, und stellen Sie $f'(y)$ möglichst einfach dar!

Lösung: Da der Integrand stetig und partiell nach y differenzierbar ist, können wir die Integration über x mit der Differentiation nach y vertauschen und erhalten insbesondere auch, daß die Funktion differenzierbar ist. Bei der Ableitung des Integranden nach y fällt der zweite Summand völlig weg; die des ersten ist nach der Produktregel $e^{-xy} - xye^{-xy}$. Somit ist

$$f'(y) = \int_{-1}^{1}(1-xy)e^{-xy}\,dx\,.$$

Durch partielle Integration erhalten wir mit $u = 1-xy$ und $v' = e^{-xy}$, also $v = -\frac{e^{xy}}{y}$ und $u' = -y$

$$\int(1-xy)e^{-xy}\,dx = -\frac{(1-xy)e^{-xy}}{y} - \int y\frac{e^{-xy}}{y}\,dx = -\frac{e^{-xy}}{y} + xe^{-xy} + \frac{e^{-xy}}{y} + C$$
$$= xe^{-xy} + C\,.$$

Einfach ausgedrückt ist daher $f'(y) = e^y + e^{-y} = 2\cosh y$.

b) K sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt und K' sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Punkt $(3,5)$. Zeigen Sie: Wenn für eine Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ beide Integrale existieren, ist

$$\int_K f(x,y) = \int_{K'} f(x-3,y-5)\,.$$

Lösung: Die Abbildung $\varphi\colon\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)\mapsto(x-3,y-5)\end{cases}$ ist ein Diffeomorphismus von K' auf K. Seine JACOBI-Matrix ist die Einheitsmatrix, die Funktionaldeterminante ist also gleich eins, und damit ist die obige Formel einfach die Transformationsformel, angewendet auf φ.