WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

10. Juni 2013

Modulklausur Analysis II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Zeigen Sie: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Maximumsnorm eine CAUCHY-Folge von Elementen $x_k \in \mathbb{R}^n$, so auch bezüglich der EUKLIDischen Norm.

2) Die erste Spalte der JABOBI-Matrix der differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ enthalte nur Nullen. Was können Sie über f sagen?

3) *Richtig oder falsch:* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ordne dem Punkt (x, y, z) den Wert $e^{f(x,y,z)}$ zu. Dann haben f und g ihre relativen Maxima in den gleichen Punkten.

4) *Richtig oder falsch:* Jede Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist beschränkt.

5) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_1 = 0$ und $x_{k+1} = \frac{1}{2}\cos^2 x_k$ für alle $k \geq 1$ konvergiert.

6) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ LEBESGUE-integrierbar und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist auch die Funktion $1/f$ LEBESGUE-integrierbar auf $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 1: (*8 Punkte)*

a) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad vier um den Punkt $(0, 0)$ für die Funktion $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)\sin(x + y)$!

Hinweis: $\log(1 + z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}$

b) Zeigen Sie, daß der Gradient von f im Nullpunkt verschwindet, daß f dort aber weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum hat!

Aufgabe 2: (*8 Punkte)*

Bestimmen Sie die relativen Extrema der Funktion $f(x, y) = 2y^3 - x^3 + 6x^2 - 3xy^2$ auf $\mathbb{R}^2$!

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x, y, z) = x^{1/2} y^{1/3} z^{1/6}$ unter der Nebenbedingung $15x + 30y + 10z \le 180$!

Aufgabe 4: *(8 Punkte)*

a) Skizzieren Sie die Menge $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi \text{ und } -\sin x < y \le \sin^2 x\}$

b) Bestimmen Sie die Randpunkte und den Abschluß von A !

c) Ist A offen? abgeschlossen? beschränkt? kompakt? wegzusammenhängend? zusammenhängend?

d) Bestimmen Sie die Fläche von A !

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Berechnen Sie $\int_Q (x^4 + xy + y^4)$!

b) K sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt. Berechnen Sie $\int_K \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$!

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(y) = \int_{-1}^{1} \left(y e^{-xy} + e^{-x^4}\sqrt{1 - \sin x}\right) dx\,.$$

Zeigen Sie, daß f eine differenzierbare Funktion ist, und stellen Sie $f'(y)$ möglichst einfach dar!

b) K sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt und K' sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Punkt $(3, 5)$. Zeigen Sie: Wenn für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beide Integrale existieren, ist

$$\int_K f(x, y) = \int_{K'} f(x - 3, y - 5)\,.$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Montag, dem 10. Juni 2013, um 14^{30} Uhr