WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27.+28. Mai 2013

a) Beschreiben Sie die Niveaulinien der Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = \max\bigl\{|x|, |y|\bigr\}$!

Lösung: f ist hier gerade die Maximumsnorm des Punkts (x,y); die Niveaumenge zum Funktionswert $a > 0$ ist das Quadrat mit Ecken $(\pm a, \pm a)$, die zu $a = 0$ ist die Menge $\bigl\{(0,0)\bigr\}$. Zu $a < 0$ sind die Niveaumengen leer.

b) In welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ stetig?

Lösung: Da sie nur aus Grundrechenarten zusammengesetzt ist, auf jeden Fall in allen Punkten, in denen der Nenner nicht verschwindet, d.h. für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Im Nullpunkt ist sie genau dann stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| < \varepsilon$$

ist für alle (x,y) mit $\|(x,y)\| < \delta$, wobei es nicht darauf ankommt, mit welcher Norm wir arbeiten. Am einfachsten geht es meist mit der Maximumsnorm; arbeiten wir also damit. Für Punkte der Form $(x,0)$ mit $x \neq 0$ ist $f(x,0) = \frac{x^3}{x^2} = x$; wenn wir $\|(x,0)\|_\infty = |x| < \delta$ wählen, ist also auch $|f(x,0)| < \delta$. Betrachten wir aber Punkte der Form $(0,y)$; so ist $f(0,y) = 1/y$, und offensichtlich gibt es schon zu $\varepsilon = 1$ kein $\delta > 0$, so daß $|1/y| < 1$ ist für alle y mit $|y| < \delta$. Somit ist die Funktion nicht stetig im Nullpunkt.

c) In welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ stetig?

Lösung: Auch diese Funktion ist aus Grundrechenarten zusammengesetzt und hat einen Nenner, der nur im Nullpunkt verschwindet; daher ist auch sie stetig in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Bei Punkten der Form $(x,0)$ oder $(0,y)$ gibt es hier keine Schwierigkeiten; daher versuchen wir, den Funktionswert abzuschätzen:

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2} - \frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2}\right| + \left|\frac{y^3}{y^2}\right| = |x| + |y| ,$$

da $x^2 \ge 0$ und $y^2 \ge 0$. Setzen wir zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ daher $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, so gilt für alle (x,y) mit $\|(x,y)\|_\infty < \delta$, daß sowohl $|x|$ als auch $|y|$ kleiner als δ sind und damit, wie wir gerade gezeigt haben, $|f(x,y)| < 2\delta = \varepsilon$. Damit ist die Stetigkeit von f im Nullpunkt gezeigt; f ist also auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

d) Konvergiert die Folge der Funktionen $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \sin\bigl(x + \frac{1}{k}\bigr)$ punktweise gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Konvergiert sie gleichmäßig gegen eine solche Funktion?

Lösung: Da die Sinusfunktion stetig ist, konvergiert die Folge der Zahlen $f_k(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x) = \sin x$; die Folge konvergiert also Punktweise gegen die Sinusfunktion. Die Differenz $f_k(x) - f(x)$ könnten wir mit der Additionsregel

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

ausdrücken; einfacher geht es mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Danach gibt es eine Zahl ¿ξ mit $x \le \xi \le x + \frac{1}{k}$, so daß

$$\frac{\sin\bigl(x+\frac{1}{k}\bigr) - \sin x}{\frac{1}{k}} = \cos\xi \quad \text{oder} \quad \sin\left(x + \frac{1}{k}\right) - \sin x = \frac{\cos\xi}{k}$$

ist. Da $|\cos\xi| \le 1$ ist, ist daher $|f_k(x) - f(x)| \le \frac{1}{k}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wählen wir also zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N so, daß $\frac{1}{N} < \varepsilon$ ist, gilt $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $k \ge N$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Somit konvergiert die Folge gleichmäßig.

e) Konvergiert die Folge der Funktionen $g_k\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ mit $g_k(x) = \tan\left(x - \frac{1}{k}\right)$ punktweise gegen eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Konvergiert sie gleichmäßig gegen eine solche Funktion?

Lösung: Da der Tangens im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ stetig ist und alle betrachteten Werte für x und für $x - \frac{1}{k}$ in diesem Intervall liegen, folgt die punktweise Konvergenz gegen $g(x) = \tan x$ genau wie eben beim Sinus.

Die Ableitung von $\tan x$ ist $1/\cos^2 x$; jetzt sagt uns also der Mittelwertsatz, daß

$$\tan x - \tan\left(x - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k\cos^2\xi}$$

ist für eine reelle Zahl ξ mit $x - \frac{1}{k} \le \xi \le x$. Da der Kosinus zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ monoton fällt, ist somit

$$\left|\tan x - \tan\left(x - \frac{1}{k}\right)\right| = \frac{1}{k\cos^2\xi} \ge \frac{1}{k\cos^2\left(x - \frac{1}{k}\right)}\,.$$

Lassen wir rechts x gegen $\frac{\pi}{2}$ gehen, erhalten wir den Grenzwert

$$\frac{\frac{1}{k}}{\sin^2\frac{1}{k}}\,.$$

Um das Verhalten dieses Werts für $k \to \infty$ zu untersuchen, können wir den Grenzwert von $\frac{z}{\sin^2 z}$ für $z \to 0$ bestimmen; nach DE L'HÔPITAL ist

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2\sin z\cos z}\,,$$

und das geht gegen unendlich, da $\sin z$ gegen Null geht. Somit können wir zu keinem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden derart, daß $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $k \ge N$ und alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$; die Konvergenz ist also nicht gleichmäßig.

f) Untersuchen Sie die Mengen

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le x - [x]\right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < y < x - [x]\right\}$$

auf Zusammenhang und Wegzusammenhang!

Lösung: A ist wegzusammenhängend und damit erst recht auch zusammenhängend, da die wegzusammenhängende x-Achse in A liegt und jeder Punkt von A durch eine Strecke in A mit der x-Achse verbunden werden kann.

Konkret seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei Punkte aus A. Wir verbinden zunächst (x_1, y_1) mit $(x_1, 0)$ durch die Strecke aus allen Punkten (x_1, t) mit $0 \le t \le y$; sie liegt in A, denn $0 \le t \le y \le x_1 - [x_1]$. Als nächstes gehen auf der x-Achse von $(x_1, 0)$ nach $(x_2, 0)$, und dann auf der Strecke von $(x_2, 0)$ nach (x_2, y_2) zum Zielpunkt.

B enthält keine Punkte mit ganzzahliger x-Koordinate, denn für solche Punkte ist $x = [x]$, so daß y die Ungleichung $0 < y < 0$ erfüllen müßte. Damit ist B nicht zusammenhängend: Die offenen Mengen $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ und $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ überdekken B zwar gemeinsam, aber keine allein. Da jede wegzusammenhängende Menge zusammenhängend ist, ist B erst recht nicht wegzusammenhängend.

g) R sei die Raute mit Ecken $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$. Berechnen Sie $\int_R x^2y^2$, indem Sie die Raute zu einem achsenparallelen Quadrat drehen!

Lösung: Wie aus den Übungen der letzten Woche und/oder der Linearen Algebra wissen, ist eine Drehung um den Nullpunkt mit Winkel α gegeben durch die Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \left(x\cos\alpha - y\sin\alpha,\, x\sin\alpha + y\cos\alpha\right) \end{cases}$$

Da die Raute ein Quadrat mit Kantenlänge $\sqrt{2}$ ist, wenden wir sie für $\alpha = 45°$ an auf das Quadrat Q mit Ecken $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Da $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ist, haben wir die Abbildung

$$\begin{cases} Q \to R \\ (u,v) \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(u-v), \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v)\right) \end{cases}$$

Da die Funktionaldeterminante gleich eins ist (s. letzte Woche), ist nach der Transformationsformel

$$\int_R x^2y^2 = \int_Q \frac{(u-v)^2(u+v)^2}{4} = \int_Q \frac{(u^2-v^2)^2}{4} = \int_Q \frac{u^4-2u^2v^2+v^4}{4},$$

was wir durch eindimensionale Integrationen ausrechnen können als

$$\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \left(\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{u^4-2u^2v^2+v^4}{4}\, du \right) dv = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{u^5}{20} - \frac{u^3v^2}{6} + \frac{uv^4}{4} \Big|_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \right) dv$$

$$= \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{\sqrt{2}}{80} - \frac{\sqrt{2}v^2}{12} + \frac{\sqrt{2}v^4}{4} \right) dv = \frac{1}{40} - \frac{1}{36} + \frac{1}{40} = \frac{1}{20} - \frac{1}{36} = \frac{1}{45}.$$