Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 21. Mai 2013

a) Berechnen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$!

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) Welche Fläche hat das Dreieck mit Ecken $(1,2,3)$, $(2,3,1)$ und $(3,1,2)$?

Lösung: Die von der Ecke $(1,2,3)$ ausgehenden Kantenvektoren sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ;$$

der Flächeninhalt des von beiden aufgespannten Parallelogramms ist die Länge des Vektors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \quad 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ -4+1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} ,$$

also $\sqrt{3^2+3^2+3^2} = 3\sqrt{3}$. Die Fläche des Dreiecks ist nur halb so groß, also $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

c) Welchen Winkel hat das Dreieck im Punkt $(1,2,3)$?

Lösung: Das ist der Winkel φ zwischen den beiden Vektoren aus der vorigen Aufgabe. Beide haben die Länge $\sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$, also hat ihr Kreuzprodukt die Länge $6 \sin\varphi$. Wie wir gerade nachgerechnet haben, ist dies $3\sqrt{3}$, also ist $\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Damit ist $\varphi = 60^\circ$ oder $\varphi = 120^\circ$. Das Skalarprodukt der beiden Vektoren kann einerseits aus den Komponenten berechnet werden als $1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$, andererseits ist es gleich dem Produkt der beiden Längen mal dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels. Somit ist $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, der Winkel ist also 60°.

(Alternativ kann man sich auch überlegen, daß das Dreieck gleichseitig ist: Zwei der Kantenvektoren haben wir bereits berechnet und gesehen, daß sie die Länge $\sqrt{6}$ haben; der dritte ist

$$\begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

hat also ebenfalls die Länge $\sqrt{6}$. Somit ist das Dreieck gleichseitig, und alle Winkel sind gleich sechzig Grad.)

d) *Richtig oder falsch:* Für drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

Lösung: Bevor wir einfach darauf losrechnen, sollten wir uns zunächst überlegen, ob ein solches Assoziativgesetz überhaupt zu erwarten ist. Setzen wir etwa $\vec{v} = \vec{w}$, so ist $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$, die linke Seite ist also $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$. Rechts bilden wir zunächst $\vec{u} \times \vec{v}$; falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht auf einer Geraden liegen, ist das ein Vektor positiver Länge, der senkrecht auf $\vec{v}$ steht; der Vektor $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{v}$ hat also als Länge das Produkt der Längen von $\vec{v}$ und $\vec{u}\times\vec{v}$.

Für ein konkretes Gegenbeispiel können wir Koordinanteneinheitsvektoren betrachten: Für $\vec{u}=\vec{e}_1$ und $\vec{v}=\vec{w}=\vec{e}_2$ ist

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{e}_1\times(\vec{e}_2\times\vec{e}_2)=\vec{e}_1\times\vec{0}=\vec{0} \quad\text{und}\quad (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\times\vec{e}_2=\vec{e}_3\times\vec{e}2=-\vec{e}_1\,.$$

Das Assoziativgesetz gilt somit im allgemeinen nicht für das Kreuzprodukt.

e) Die stetige Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ hänge, in Polarkoordinaten ausgedrückt, nur ab vom Winkel φ. Was können Sie über f sagen?

Lösung: Wegen der Stetigkeit von f ist für jeden Wert φ_0 der Funktionswert im Nullpunkt gleich dem Limes für $r\to 0$ über die Werte von f in den Punkten mit Polarkoordinaten (r,φ_0). Da diese allesamt gleich sind, hat f im Punkt (r,φ_0) denselben Wert wie im Nullpunkt, d.h. f ist konstant.

f) Die Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ hänge, in Polarkoordinaten geschrieben, nur von φ ab. Wie sehen die Niveaulinien von f aus?

Lösung: Es sind Vereinigungen von vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen, wobei der Nullpunkt selbst natürlich auf keinem dieser Strahle liegt.

g) Schreiben Sie die Funktion $f(x,y)=x^2+3xy^2$ in Polarkoordinaten!

Lösung: $F(r,\varphi)=f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=r^2\cos^2\varphi+3r^3\cos\varphi\sin^2\varphi$.

h) Geben Sie die Funktion $F(r,\varphi)=r^2\cos 2\varphi$ an in kartesischen Koordinaten!

Lösung: $\cos 2\varphi=\frac{1}{2}\left(e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}\right)=\frac{1}{2}\left((e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})^2-2\right)=2\cos^2\varphi-1$; somit ist

$$r^2\cos 2\varphi=2r^2\cos^2\varphi-r^2=2x^2-(x^2+y^2)=x^2-y^2\,.$$

i) Der Punkt $P\in\mathbb{R}^2$ habe die kartesischen Koordinaten $(x,y)\neq(0,0)$. Was sind seine Polarkoordinaten?

Lösung: Sei Abstand vom Nullpunkt ist nach PYTHAGORAS $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Über den Winkel φ wissen, daß

$$\cos\varphi=\frac{x}{r},\quad \sin\varphi=\frac{y}{r}\quad\text{und}\quad\tan\varphi=\frac{y}{x}$$

ist, wobei letztere Formel nur für $y\neq 0$ gilt. Keine dieser drei Formeln für sich allein bestimmt φ vollständig, da Sinus, Kosinus und Tangens nur auf Intervallen der Länge π injektiv sind, der Winkel φ aber Werte aus einem Intervall der Länge 2π annehmen kann. Wenn wir den Arkuskosinus als Umkehrfunktion des Kosinus auf dem Intervall $[0,\pi]$ definieren, ist

$$\varphi=\begin{cases}\arccos\frac{x}{r} & \text{falls } y\geq 0\\ -\arccos\frac{x}{r} & \text{falls } y<0\end{cases};$$

ähnliche Formeln lassen sich auch mit Sinus und Tangens aufstellen.

j) Eine Drehung um den Nullpunkt mit Winkel α ist gegeben durch die Abbildung

$$f\colon\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x,y)\mapsto\left(x\cos\alpha-y\sin\alpha,x\sin\alpha+y\cos\alpha\right)\end{cases}$$

Was ist die Funktionaldeterminante dieser Abbildung

Lösung: Die JACOBI-Matrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ hat die Determinante $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, die Funktionaldeterminante ist also gleich eins.

k) Berechnen Sie für $K_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le R^2\}$ das Integral $\int_{K_1} \sqrt{1-x^2-y^2}$!

Lösung: Da wir über eine Kreisscheibe integrieren und der Integrand nur von x^2+y^2 abhängt, sollte das Problem in Polarkoordinaten einfacher zu lösen sein als in kartesischen. In Polarkoordinaten ausgedrückt ist

$$K_R = \big\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}_{\ge 0} \times [0, 2\pi) \bigm| 0 \le r \le R\big\} \quad \text{und} \quad \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-r^2}\,;$$

nach der Transformationsformel ist daher

$$\int_{K_1} \sqrt{1-x^2-y^2} = \int_{K_1} \sqrt{1-r^2}\cdot r = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr \right) d\varphi\,.$$

Das innere Integral könnten wir mit partieller Integration weiter untersuchen; einfacher dürfte aber wohl eine Anwendung der Substitutionsregel sein: Setzen wir $u = 1 - r^2$, so ist $du = -2r\,dr$, und mit r geht auch u von null bis eins, allerdings in Gegenrichtung, so daß außer dem Minuszeichen bei du noch ein weiteres zu berücksichtigt werden muß. Daher ist

$$\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Somit ist

$$\int_{K_1} \sqrt{1-x^2-y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3} = \frac{2\pi}{3}\,.$$

l) Was ist $\int_{K_R} \sqrt{R^2-x^2-y^2}$?

Lösung: Hier könnten wir im wesentlichen genauso vorgehen wie bei der vorigen Aufgabe; wir können das Integral aber auch einfach auf das vorige zurückführen: Schreiben wir $x = Ru$ und $y = Rv$, so ist

$$\sqrt{R^2-x^2-y^2} = \sqrt{R^2-R^2u^2-R^2v^2} = R\sqrt{1-u^2-v^2}\,,$$

und wenn sich (x,y) in K_R bewegt, bewegt sich (u,v) in K_1. Die Funktionaldeterminante ist die Determninante der Diagonalmatrix mit Einträgen R; also R^2. Somit ist

$$\int_{K_R} \sqrt{R^2-x^2-y^2} = R\int_{K_1} \sqrt{1-u^2-v^2}\cdot R^2 = R^3\int_{K_1} \sqrt{1-u^2-v^2} = \frac{2\pi R^3}{3}\,.$$

m) Interpretieren Sie dieses Integral geometrisch!

Lösung: $\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ist die Höhe der Halbkugel mit Radius R über K_R; der Wert des Integrals ist also gleich dem Volumen dieser Halbkugel.

n) Was ist $\int_{K_R} e^{\sqrt{x^2+y^2}}$!

Lösung: Auch hier betrachten wir das Problem wieder am besten in Polarkoordinaten; der Intgegrand ist $e^{\sqrt{x^2+y^2}} = e^r$. Nach der Transformationsformel ist daher

$$\int_{K_R} e^{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{K_R} e^r\cdot r = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R re^r\,dr \right) d\varphi\,.$$

Das innere Integral können wir mit partieller Integration bestimmen:
$$\int re^r\,dr = re^r - \int e^r\,dr = (r-1)e^r + C\,.$$
Somit ist
$$\int_{K_R} e^{\sqrt{x^2+y^2}} = \int\limits_0^{2\pi} (r-1)e^r\Big|_0^R\,d\varphi = 2\pi\big((R-1)e^R+1\big)\,.$$

o) Berechnen Sie $\int_E e^{\sqrt{x^2+4y^2}}$ für $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2\le 4\}$!

Lösung: Wur führen neue Koordinaten u, v ein mit $x = u$ und $y = v/2$. Dann ist
$$x^2+4y^2 = u^2+v^2\,;$$
(x,y) liegt also genau dann in E, wenn (u,v) in K_2 liegt. Außerdem ist $e^{\sqrt{x^2+4y^2}} = e^{\sqrt{u^2+v^2}}$. Die JACOBI-Matrix der Abbildung $(u,v)\mapsto(u,\frac12 v)$ ist $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\frac12\end{smallmatrix}\right)$ mit Determinante $\frac12$; somit ist nach der Transformationsformel
$$\int_E e^{\sqrt{x^2+4y^2}} = \frac12\int_{K_2} e^{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac12\cdot 2\pi\big((2-1)e^2+1\big) = \pi(e^2+1)\,.$$

p) Finden Sie die relativen und absoluten Extrema der Funktion $f(x,y) = e^{x-3y}\sin(3x+y)$ auf der Menge
$$M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\le 2x\}\,!$$

Lösung:
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= e^{x-3y}\sin(3x+y) + 3e^{x-3y}\cos(3x+y)\\ f_y(x,y) &= -3e^{x-3y}\sin(3x+y) + e^{x-3y}\cos(3x+y)\end{aligned}$$
Falls beide partielle Ableitungen in einem Punkt verschwinden, verschwindet dort auch $f_x(x,y) - 3f_y(x,y) = 10e^{x-3y}\sin(3x+y)$ und $3f_x(x,y)+f_y(x,y) = 10e^{x-3y}\cos(3x+y)$; da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, müssen also sowohl $\sin(3x+y)$ als auch $\cos(3x+y)$ verschwinden. Das geht aber nicht, denn Sinus und Kosinus haben keine gemeinsame Nullstelle. Somit gibt es kein Extremum im Innern der Menge.
Die Randpunkte von M sind die Punkte auf der Geraden $y = 2x$; dort ist
$$f(x,y) = f(x,2x) = e^{-5x}\sin 5x\,.$$
Die Ableitung dieses Ausdrucks nach x ist $5e^{-5x}(\cos 5x - \sin 5x)$, in einer Nullstelle muß also $\cos 5x = \sin 5x$ sein, d.h. $5x = \frac14\pi + k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ und damit $x = \frac{1}{20}\pi + \frac15 k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$. Für diese Werte ist
$$f(x,2x) = e^{-\pi/4-k\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right) = (-1)^k e^{-\pi/4-k\pi}\frac{\sqrt2}{2}\,.$$
Da ein Randpunkt höchstens dann Extremum von $f(x,y)$ in M sein kann, wenn er auch Extremum auf dem Rand ist, kommen höchstens diese Punkte als Extrema in Frage, wobei die Punkte mit geradem k Kandidaten für Maxima sind, die mit ungeradem für Minima. Die partielle Ableitung von f nach x in so einem Punkt ist
$$e^{-\pi/4-k\pi}\big(\sin 5x + 3\cos 5x\big) = 4e^{-\pi/4-k\pi}\sin 5x = 4\cdot(-1)^k\cdot e^{-\pi/4-k\pi}\frac{\sqrt2}{2}\,;$$
die nach y entsprechend
$$e^{-\pi/4-k\pi}\big(-3\sin 5x + \cos 5x\big) = -2e^{-\pi/4-k\pi}\sin 5x = -2\cdot(-1)^k\cdot e^{-\pi/4-k\pi}\frac{\sqrt2}{2}\,.$$
Somit ist f_x positiv für gerade k und negativ für ungerade; bei f_y ist es umgekehrt.

Wenn wir vom Rand in x- oder y-Richtung ins Innere von M gehen, werden x und y kleiner. In der Formel

$$f(x+h, y+\ell) \approx f(x, y) + hf_x(x, y) + \ell f_y(x, y)$$

müssen wir also für h und ℓ negative Werte einsetzen. Für gerades k, wenn wir also auf dem Rand ein Maximum haben, wird der Funktionswert daher *größer,* wenn wir in y-Richtung ins Innere gehen; für ungerade k, wenn wir auf em Rand ein Minimum haben, wird er dann *kleiner.* Somit sind die Extrema auf dem Rand von M keine Extrema auf M; die Funktion hat also keine lokalen oder globalen Extrema auf M.