WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13.+14. Mai 2013

a) $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ seien zwei stetige Funktionen und $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, daß die Menge $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } f(x) \leq y \leq g(x)\}$ wegzusammenhängend ist!

Lösung: (x_1, y_1) und (x_2, y_2) seien zwei Punkte aus A; o.B.d.A. sei $x_1 \leq x_2$. Dann läßt sich zunächst (x_1, y_1) durch eine ganz in A liegende Strecke mit $\big(x_1, f(x_1)\big)$ verbinden, dieser Punkt wiederum über die ganz in A liegende Kurve $t \mapsto \big(t, f(t)\big)$ über dem Intervall $[x_1, x_2]$ $\big(x_2, f(x_2)\big)$, und von dort kommen wir wiederum mit einer in A liegende Strecke zum Punkt (x_2, y_2).

b) Gilt dies auch, wenn man auf die Stetigkeitsannahme verzichtet?

Lösung: *Nein:* Sei etwa $f(x) = 0$ und $g(x) = 2$ für $x \leq 0$, aber $f(x) = 3$ und $g(x) = 5$ für $x > 0$; das Intervall $[a, b]$ sei zum Beispiel $[-10, 10]$. Falls es einen Weg $\gamma: [0, 1] \to A$ gäbe mit $\gamma(0) = (-1, 1)$ und $\gamma(1) = (1, 4)$, so gälte für dessen Komponenten γ_1, γ_2, daß beides stetige Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $\gamma_2(t) \in [0, 2]$ falls $\gamma_1(t) \leq 0$, aber $\gamma_2(t) \in [3, 5]$, falls $\gamma_1(t) > 0$. Das kann aber nicht sein, denn nach dem Zwischenwertsatz muß γ_1 auch den Wert Null annehmen; an einem solchen Punkt läge dann der linksseitige Grenzwert von γ_2 im Intervall $[0, 2]$, der rechtsseitige aber in $[3, 5]$, was bei einer stetigen Funktion nicht vorkommen kann.

c) Gilt dies auch, wenn man auf die Annahme $f(x) \leq g(x)$ verzichtet?

Lösung: *Nein;* ist beispielsweise $[a, b] = [-2, 2]$, $f(x) = 2 - x^2$ und $g(x) = x^2$, so gibt es keine Punkte $(x, y) \in A$ mit $x \in (-1, 1)$. Damit kann es auch keinen Weg geben, der die Punkte $(-2, 0)$ und $(2, 0)$ verbindet.

d) Welche Fläche hat die Menge A?

Lösung: Nach einer der grundlegenden Eigenschaften des RIEMANN-Integrals ist das $\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$.

e) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller innerer, äußerer und Randpunkte von A!

Lösung: Innere Punkte sind die, bei denen sowohl die x- als auch die y-Koordinate in beide Richtungen um irgendeinen Betrag ε variiert werden kann, ohne daß der Punkt aus der Menge A herausfällt. Das Innere ist daher

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b \text{ und } f(x) < y < g(x)\big\}.$$

Äußere Punkte sind innere Punkte des Komplements; da A abgeschlossen und sein Komplement somit offen ist, sind das gerade die sämtlichen Punkte von $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Randpunkte schließlich haben in jeder Umgebung sowohl Punkte aus A als auch solche aus dem Komplement; der Rand ist also die Vereinigung der vier Randlinien:

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a \text{ und } f(a) \leq y \leq g(a)\big\} \cup \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = b \text{ und } f(b) \leq y \leq g(b)\big\}$$
$$\cup \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } y = f(x)\big\} \cup \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } y = g(x)\big\}.$$

f) Zeigen Sie, daß das für zwei positive reelle Zahlen a, b gilt: Das äußere Maß der Menge $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$ ist höchstens gleich $4ab$!

Lösung: Da $\frac{x^2}{a^2}$ und $\frac{y^2}{b^2}$ nie negativ werden können, muß für jeden Punkt $(x, y) \in E$ gelten, daß $|x| \le a$ und $|y| \le b$ sind. Somit liegt E ganz im Rechteck mit Ecken $(\pm a, \pm b)$, dessen Fläche $4ab$ ist. Daher gibt es eine Überdeckung durch „Quader“ mit einem Gesamtvolumen von $4ab$, d.h. $\mu^*(E) \le 4ab$.

g) Richtig oder falsch: Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}^n$, so ist auch ihre Summe eine Norm.

Lösung: *Richtig:* Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\|\lambda x\|_1 + \|\lambda x\|_2 = |\lambda| \cdot \|x\|_1 + |\lambda| \cdot \|x\|_2 = |\lambda| \cdot \left(\|x\|_1 + \|x\|_2\right).$$

Auch bei der Dreiecksungleichung können wir die beiden Seiten für die einzelnen Normen einfach addieren. Schließlich ist mit $\|x\|_1$ und $\|x\|_2$ auch die Summe nichtnegativ, und wenn sie Null ist, müssen beide Summanden verschwinden, d.h. $\|x\|_1 = \|x\|_2 = 0$. Damit muß x der Nullpunkt des $\mathbb{R}^n$ sein.

h) Die JACOBI-Matrix der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x + 2y) & 2\cos(x + 2y) \\ -6x \sin(3x^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Was können Sie über f sagen?

Lösung: Als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ hat f zwei Komponenten $g, h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{pmatrix}$. Wir wissen also, daß

$$g_x = \cos(x + 2y), \quad g_y = 2\cos(x + 2y), \quad h_x = -6x \sin(3x^2) \quad \text{und} \quad h_y = 0$$

ist. Die Funktion h hängt somit nicht von y ab, ist also eine Funktion nur von x mit Ableitung $-6x \sin(3x^2)$. Durch partielle Integration oder Integration nach der Substitutionsregel oder einfach durch Erraten nach der Kettenregel sieht man, daß $h(x) = \cos(3x^2) + a$ mit einer beliebigen Konstante $a \in \mathbb{R}$ sein muß.
Die Ableitung von g nach x ist $\cos(x + 2y)$; somit ist $g(x, y) = \sin(x + 2y)$ plus einer Funktion, die nur von y abhängt. Da $\frac{\partial}{\partial y} \sin(x + 2y) = 2\cos(x + 2y)$ ist, kann letztere Funktion nur eine Konstante sein, d.h. $g(x) = \sin(x + 2y) + b$ mit $b \in \mathbb{R}$.

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion. Was ist $\int 3\cos(x) \cdot f'(\sin x)\, dx$?

Lösung: Wir substituieren $u = \sin x$; dann ist $du = \cos x\, dx$, also

$$\int 3\cos(x) \cdot f'(\sin x)\, dx = \int 3f'(u)\, du = 3f(u) + C = 3f(\sin x) + C.$$

j) Berechnen Sie die Integrale

$$I_1 = \int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 3x^2 + 9x + 19}\, dx, \quad I_2 = \int \tan x\, dx \quad \text{und} \quad I_3 = \int x^3 \sin(x^2)\, dx\,!$$

Lösung: Bei I_1 ist die Ableitung des Nenners $3x^2 + 6x + 9$, also das Dreifache des Zählers. Da $\log f(x)$ die Ableitung $f'(x)/f(x)$ hat, ist

$$I_1 = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 + 6x + 9}{x^3 + 3x^2 + 9x + 19}\, dx = \frac{1}{3} \log\left|x^3 + 3x^2 + 9x + 19\right| + C.$$

Auch die Stammfunktionen des Tangens können wir so bestimmen, denn $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, und die Ableitung des Kosinus ist der negative Sinus, d.h.

$$I_2 = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C\,.$$

Bei I_3 machen wir die Substitution $z = x^2$ mit $dz = 2x\,dx$; dann ist

$$I_3 = \frac{1}{2}\int z \sin z\,dz\,.$$

Partielle Integration mit $u = z$ und $v' = \sin z$ macht daraus wegen $u' = 1$ und $v = -\cos z$

$$\int z\sin z\,dz = -z\cos z + \int \cos z\,dz = \sin z - z\cos z + C\,.$$

Somit ist

$$I_3 = \frac{\sin x^2 - x^2\cos x^2}{2} + C\,,$$

wobei die Integrationskonstante hier natürlich nur halb so groß ist wie in der Formelzeile darüber.

k) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0,0), (1,0), (1,1)$ und $(0,1)$. Berechnen Sie $\int_Q xye^{-x^2-y^2}$!

Lösung: $e^{-x^2-y^2}$ hat $-2xe^{-x^2-y^2}$ als partielle Ableitung nach x und $-2ye^{-x^2-y^2}$ als partielle Ableitung nach y. Daher ist

$$\int_Q xye^{-x^2-y^2} = \int_0^1\left(\int_0^1 xye^{-x^2-y^2}\,dx\right)dy = \int_0^1\left(-\frac{y}{2}e^{-x^2-y^2}\Big|_0^1\right)dy$$

$$= \int_0^1\left(-\frac{y}{2}e^{-y^2}(e^{-1}-1)\right)dy = \frac{1}{4}(e^{-1}-1)e^{-y^2}\Big|_0^1 = \frac{(e^{-1}-1)^2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} + \frac{1}{4e^2}\,.$$

l) Zeigen Sie, daß $\int_Q \sin(xy)\cdot e^{-x^2-y^2}$ nicht größer als der gerade berechnete Wert sein kann!

Lösung: Da die Sinuslinie im Bereich der positiven x-Achse überall unter der Winkelhalbierenden liegt, ist $\sin(xy) \le xy$ für alle $(x,y) \in Q$. Damit ist wegen der Positivität der Exponentialfunktion auch $\sin(xy)\cdot e^{-x^2-y^2} \le xye^{-x^2-y^2}$ für alle $(x,y) \in Q$. Nach der Monotonieregel ist daher

$$\int_Q \sin(xy)\cdot e^{-x^2-y^2} \le \int_Q xye^{-x^2-y^2}\,.$$

m) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0,0), (\frac{\pi}{4},0), (\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ und $(0,\frac{\pi}{4})$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\int_Q \cos(x+y)\cdot e^{-x^2-y^2} \le \sqrt{2}-1\,!$$

Lösung: Da $e^{-x^2-y^2} \le 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ist

$$\int_Q \cos(x+y)\cdot e^{-x^2-y^2} \le \int_Q \cos(x+y) = \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\pi/4}\cos(x+y)\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sin(x+y)\Big|_0^{\pi/4} dy = \int_0^{\pi/4}\left(\sin(y+\tfrac{\pi}{4}) - \sin y\right)dy = \left(-\cos(y+\tfrac{\pi}{4}) + \cos y\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= -\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos\tfrac{\pi}{4} + \cos\tfrac{\pi}{4} - \cos 0 = 0 + 2\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2}-1\,.$$