

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13.+14. Mai 2013

- a) $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien zwei stetige Funktionen und $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, daß die Menge $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } f(x) \leq y \leq g(x)\}$ wegzusammenhängend ist!
- b) Gilt dies auch, wenn man auf die Stetigkeitsannahme verzichtet?
- c) Gilt dies auch, wenn man auf die Annahme $f(x) \leq g(x)$ verzichtet?
- d) Welche Fläche hat die Menge A ?
- e) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller innerer, äußerer und Randpunkte von A !
- f) Zeigen Sie, daß das für zwei positive reelle Zahlen a, b gilt: Das äußere Maß der Menge $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ ist höchstens gleich $4ab$!
- g) *Richtig oder falsch*: Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf \mathbb{R}^n , so ist auch ihre Summe eine Norm.
- h) Die JACOBI-Matrix der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x + 2y) & 2 \cos(x + 2y) \\ -6x \sin(3x^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Was können Sie über f sagen?

- i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion. Was ist $\int 3 \cos(x) \cdot f'(\sin x) dx$?
- j) Berechnen Sie die Integrale

$$I_1 = \int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 3x^2 + 9x + 19} dx, \quad I_2 = \int \tan x dx \quad \text{und} \quad I_3 = \int x^3 \sin(x^2) dx!$$

- k) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 1)$. Berechnen Sie $\int_Q xy e^{-x^2-y^2} dx dy$!
- l) Zeigen Sie, daß $\int_Q \sin(xy) \cdot e^{-x^2-y^2} dx dy$ nicht größer als der gerade berechnete Wert sein kann!
- m) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ und $(0, \frac{\pi}{4})$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\int_Q \cos(x + y) \cdot e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \sqrt{2} - 1!$$