

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 6.+7. Mai 2013

- a) Finden Sie die größte Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$, auf der die Funktion $f(x, y) = \log \frac{1}{x^2 + y^2}$ definiert ist und entscheiden Sie, in welchen Punkten $(x, y) \in D$ die Funktion stetig ist!
- b) Zeigen Sie, daß für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ im Nullpunkt alle partiellen Ableitungen existieren, daß f dort aber nicht stetig ist!
- c) Finden Sie die Extrema der Funktion $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^2$ auf dem (abgeschlossenen) Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$!
- d) Zeigen Sie: $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist in jedem Punkt $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ aus \mathbb{R}^3 mindestens zweimal stetig differenzierbar und

$$f_{xx}(x, y, z) + f_{yy}(x, y, z) + f_{zz}(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} !$$

- e) Bestimmen Sie den maximalen Wert, den die Funktion $f(x, y) = \sqrt{x} \sqrt[3]{y}$ unter den Nebenbedingungen $x \geq 0$, $y \geq 0$ und $3x + 2y \leq 320$ annehmen kann!
- f) Zeigen Sie, daß es eine differenzierbare Funktion $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß die Punkte $(x, y) = (x, f(x))$ die Gleichung $(x^2 + y^2)^2 - x^3 + 3xy^2 = 0$ erfüllen, und berechnen Sie $f'(x)$!
- g) Q sei das achsenparallele Rechteck mit Ecken $(0, \pi)$ und $(1, 2\pi)$. Berechnen sie $\int_Q f$ für $f(x, y) = y \cos(xy)$!
- h) Zeigen Sie, daß durch $x_0 = 1$ und $x_k = \cos \frac{1}{2} x_{k-1}^2$ definierte Folge konvergiert, und geben Sie eine Gleichung an, die der Grenzwert erfüllt!
- i) Ist die Menge $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ und } 0 \leq y \leq \sin x\}$ konvex, wegzusammenhängend, zusammenhängend und/oder kompakt?
- j) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit bzw. indefinit?
- k) Konvergiert die Folge der Funktionen $f_k(x) = \frac{k}{k+x}$ auf dem Intervall $[0, 1]$ punktweise, gleichmäßig bzw. bezüglich der L^1 -Norm?