Wolfgang K. Seiler | A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 29.+30. April 2013

a) Welche der folgenden Mengen ist eine Nullmenge?

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x\right\}, \qquad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Lösung: A ist eine Nullmenge als Bild der x-Achse, einer Nullmenge, unter der der stetig differenzierbaren Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto (x, \sin x)$; genauso auch B als Bild unter $(x, y) \mapsto (\cos x, \sin x)$.

b) $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ seien zwei stetige Abbildungen auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Falls $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in D$, ist $f = g$.

Lösung: Wir betrachten die Menge A aller $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq g(x_0)$. Nach Voraussetzung ist dies eine Nullmenge; falls sie leer ist, sind wir fertig. Andernfalls sei x_0 ein Punkt aus$A$. Da eine Nullmenge keine inneren Punkte hat, liegen in jeder Umgebung von x_0 Punkte, die nicht aus A sind. Wir wählen jeweils einen solchen Punkt x_k aus der Kugel mit Radius $1/k$ um x_0. Dann ist $f(x_k) = g(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und da die Folge der x_k gegen x_0 konvergiert, ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f und g

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(x_0)\,,$$

im Widerspruch zur Annahme $x_0 \in A$. Also ist $A = \emptyset$ und $f = g$.

c) Zeigen Sie, daß durch $f_k(x) = \max\left\{0, k - k^2\,|x|\right\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion aus $K^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert wird!

Lösung: $k - k^2\,|x|$ verschwindet genau dann, wenn $|x| = 1/k$ ist; wird der Betrag größer, wird der Ausdruck negativ und damit $f_k(x) = 0$. Der Träger von f_k ist daher das abgeschlossene Intervall $[-1/k,\ 1/k]$, also kompakt. Außerdem ist f_k stetig, denn im Innern dieses Intervalls ist es durch die stetigen Funktionen $k + k^2x$ für $x < 0$ und $k - k^2x$ für $k > 0$ gegeben; die für $x = 0$ beide den Wert k haben. An den Intervallgrenzen ist die Funktionen, genau wie außerhalb, gleich Null. Ihr Graph ist also bis zum Punkt $-1/k$ und ab dem Punkt $x = 1/k$ die x-Achse; dazwischen ist es ein Dreieck mit Spitze bei $(0, k)$.

d) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f_k$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k$!

Lösung:

$$\int_{\mathbb{R}} f_k = \int_{-1/k}^{1/k} \big(k - k^2\,|x|\big)\,dx = 2\int_0^{1/k} (k - k^2x)\,dx = 2\left(kx - k^2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{1/k}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1\,,$$

wie es sich für die Fläche eines Dreiecks mit Basis $2/k$ und Höhe k gehört. Damit ist auch $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k = 1$.

e) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $K_1^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Lösung: Für $\ell \geq k$ ist $1/\ell \leq 1/k$; außerhalb des Intervalls $[-1/k,\ 1/k]$ verschwinden also beide Funktionen. Somit ist

$$\|f_\ell - f_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f_\ell - f_k| = \int_{-1/k}^{1/k} |f_\ell(x) - f_k(x)|\,dx = 2\int_0^{1/k} |f_\ell(x) - f_k(x)|\,dx\,,$$

da der Integrand eine gerade Funktion ist. Für $x > 1/\ell$, verschwindet $f_\ell(x)$, wir müssen also über f_k integrieren. Im Bereich $0 \le x \le 1/\ell$ ist

$$f_\ell(x) - f_k(x) = (\ell - \ell^2 x) - (k - k^2 x) = (\ell - k) - (\ell^2 - k^2)x = 0 \iff x = \frac{\ell - k}{\ell^2 - k^2} = \frac{1}{\ell + k}\,;$$

daher ist

$$\begin{cases} f_k(x) > f_\ell(x) & \text{falls } x > \dfrac{1}{k+\ell} \\ f_\ell(x) > f_k(x) & \text{falls } x < \dfrac{1}{k+\ell} \end{cases}.$$

Im Intervall $0 \le x \le 1/(k+\ell)$ ist also

$$|f_\ell(x) - f_k(x)| = \begin{cases} (\ell - k) - (\ell^2 - k^2)x & \text{falls } 0 \le x \le \frac{1}{k+\ell} \\ (k - \ell) - (k^2 - \ell^2)x & \text{falls } \frac{1}{k+\ell} \le x \le \frac{1}{\ell} \\ k - k^2 x & \text{falls } \frac{1}{\ell} \le x \le \frac{1}{k} \end{cases}$$

und

$$\|f_\ell - f_k\|_1 = 2\int_0^{1/(k+\ell)} \big(f_\ell(x) - f_k(x)\big)\,dx + 2\int_{1/(k+\ell)}^{1/\ell} \big(f_k(x) - f_\ell(x)\big)\,dx + 2\int_{\frac{1}{\ell}}^{1/k} f_k(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^{1/(k+\ell)} \big((\ell - k) - (\ell^2 - k^2)x\big)\,dx + 2\int_{1/(k+\ell)}^{1/\ell} \big((k - \ell) - (k^2 - \ell^2)x\big)\,dx + 2\int_{1/\ell}^{1/k} (k - k^2 x)\,dx\,.$$

Alle drei Integrale lassen sich einfach ausrechnen, am einfachsten das letzte:

$$\int_{1/\ell}^{1/k} (k - k^2 x)\,dx = kx - k^2\frac{x^2}{2}\Big|_{1/\ell}^{1/k}$$

$$= k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\ell}\right) - \frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\ell^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{k}{\ell} + \frac{k^2}{2\ell^2}\,.$$

Für hinreichend große ℓ kommt dieser Wert beliebig nahe an $\frac{1}{2}$ heran; es kann also unmöglich ein $N \in \mathbb{N}$ geben, so daß er für alle $k, \ell \ge N$ kleiner ist als ein Viertel. Damit kann es erst recht kein solches N geben, so daß $\|f_\ell - f_k\|_1 < \frac{1}{4}$, denn alle betrachteten Teilintegrale sind größer oder gleich Null. Somit bilden die f_k keine CAUCHY-Folge.

f) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $K^0_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Lösung: Im Punkt $x = 0$ ist $f_\ell(x) - f_k(x) = \ell - k$; daher ist $\|f_\ell - f_k\|_\infty \ge |\ell - k|$, was im Falle einer CAUCHY-Folge unmöglich wäre.

g) Gibt es eine Funktion f, gegen die $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert?

Lösung: *Nein,* denn die Folge der $f_k(0) = k$ divergiert.

h) Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegen die $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall (punktweise) konvergiert?

Lösung: *Ja,* denn für alle $x \ne 0$ konvergiert die Folge der $f_k(x)$ gegen Null, da $f_k(x) = 0$ für alle $k > 1/|x|$. Somit konvergiert die Folge der f_k fast überall punktweise gegen die Nullfunktion.

i) Zeigen Sie: Für jede stetige Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (f_k g) = g(0)$!
Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung!

Lösung: Da f_k außerhalb des Intervalls $[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ verschwindet, ist

$$\int_{\mathbb{R}} f_k g = \int_{-1/k}^{1/k} f_k(x)g(x)\,dx\,.$$

Da f_k nirgends negativ wird, können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden; danach gibt es ein $\xi \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$, für das gilt

$$\int_{-1/k}^{1/k} f_k(x)g(x)\,dx = g(\xi)\int_{-1/k}^{1/k} f_k(x)\,dx = g(\xi).$$

Für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es wegen der Stetigkeit von g ein $\delta > 0$, so daß $|g(x) - g(0)| < \varepsilon$ für alle x mit $|x| < \delta$. Für eine natürliche Zahl $N \geq 1/\delta$ ist $\frac{1}{k} < \delta$ für alle $k \geq N$¿; für solche k ist also $|g(\xi) - g(0)| < \varepsilon$ und damit auch

$$\left|\int_{\mathbb{R}} (f_k g) - g(0)\right| < \varepsilon\,.$$

Dies beweist die behauptete Konvergenz.

j) Für $r > 0$ sei $g_r \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g_r(x) = \begin{cases} e^{\frac{4r}{(b-a)^2}}\, e^{\frac{-r}{(x-a)(b-x)}} & \text{falls } a < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß g_r eine Funktion mit kompaktem Träger ist und bestimmen Sie das Maximum von g_r!

Lösung: Da $g_r(x)$ außerhalb des Intervalls $[a, b]$ verschwindet, müssen wir nur zeigen, daß $g_r(x)$ eine stetige Funktion ist. Im Intervall (a, b) ist g_r stetig, da zusammengesetzt aus der Exponentialfunktion und Grundrechenarten, und die Limites $\lim\limits_{x \swarrow a} g_r(x)$ und $\lim\limits_{x \nearrow b} g_r(x)$ verschwinden beide, da das Argument der Exponentialfunktion in beiden Fällen gegen $-\infty$ geht. Also ist g_r stetig auf ganz $\mathbb{R}$ mit Träger $[a, b]$ falls $b > a$ und $\emptyset$ sonst.

$$(x-a)(b-x) = -x^2 + (a+b)x - ab = -\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - ab + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

wächst im offenen Intervall von a bis $\frac{1}{2}(a+b)$ monoton, um dann bis b monoton zu fallen; beim Kehrwert ist es umgekehrt, für den negativen Kehrwert und die Funktion g_r wieder genauso. Somit nimmt g_r sein Maximum im Punkt $\frac{1}{2}(a+b)$ an; der Funktionswert dort ist, dank des Vorfaktors, gleich eins.

k) Zeigen Sie, daß für die Folge der Funktionen $f_k = g_{1/k}$ und $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_k(x)|\,dx = 0\,!$$

Was bedeutet das für die Konvergenz der Folge?
Hinweis: Betrachten Sie für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ die drei Intervalle $[a, a+\delta]$, $[a+\delta, b-\delta]$ und $[b-\delta, b]$ getrennt!

Lösung: Wir wählen eine positive Zahl $\delta < \frac{1}{2}(b-a)$ und betrachten zunächst nur das Intervall $[a+\delta, b-\delta]$. Dort ist die Differenz zwischen $f(x)$ und $g_r(x)$ im Intervallmittelpunkt $(a+b)/2$ gleich null und wächst dann zu den Intervallenden hin monoton, da g_r selbst dort monoton fällt. Tatsächlich sieht man leicht, daß g_r monoton wachsend sowohl in $x-a$ als auch in $b-x$ ist; da beide Ausdrücke im Intervall $[a+\delta, b-\delta]$ durch δ nach unten beschränkt sind, ist $g_r(x)$ in diesem Intervall daher überall mindestens gleich

$$e^{\frac{4r}{(b-a)^2}} e^{\frac{-r}{\delta(b-a-\delta)}} = e^{-r\left(\frac{1}{\delta(b-a-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)} .$$

Für alle $x \in [a+\delta, b-\delta]$ ist daher

$$f(x) - g_r(x) \le 1 - e^{-r\left(\frac{1}{\delta(b-a-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)} .$$

Dieser Ausdruck ist noch nicht sehr angenehm; wir wollen ihn weiter abschätzen. Nach Konstruktion von g_r ist der Exponent negativ, und für alle $x \ge 0$ ist $1 - e^{-x} \le x$, denn dies gilt für $x = 0$, und die Ableitung e^{-x} von $1 - e^{-x}$ ist für jedes positive x kleiner als die Ableitung eins von x. Daher ist für $t \in [a+\delta, b-\delta]$

$$\begin{aligned} f(x) - g_r(x) &\le 1 - e^{-r\left(\frac{1}{\delta(b-a-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)} \\ &\le r\left(\frac{1}{\delta(b-a-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) . \end{aligned}$$

Das Intervall hat die Länge $(b-\delta) - (a+\delta) = a + b - 2\delta$; somit ist für kleine δ

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - g_r(x)|\, dx \le r(b-a-2\delta)\left(\frac{1}{\delta(b-a-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) .$$

Da $\delta < \frac{1}{2}(b-a)$ vorausgesetzt war, ist $\delta < b-a-\delta$, also ist

$$\frac{1}{\delta(b-a-\delta)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{b-a-\delta}\right) < \frac{1}{b-a} \cdot \frac{2}{\delta}$$

und damit

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - g_r(x)|\, dx \le r(b-a)\left(\frac{2}{(b-a)\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) = r\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)}\right) .$$

In den Intervallen $[a,\ a+\delta]$ und $[b-\delta,\ \delta]$ schätzen wir die Differenz einfach durch eins ab; die entsprechenden Intergrale sind also höchstens gleich δ, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g_r(x)|\, dt \le \delta + r\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)}\right) + \delta = 2\delta + \frac{2r}{\delta} - \frac{4r}{b-a} .$$

Wir spezialisieren auf $\delta = \sqrt{r}$; dann wird dies zu $4\sqrt{r} - \dfrac{4r}{(b-a)}$, was für $r \to 0$ gegen Null geht. Die Folge der $f_k = g_{1/k}$ konvergiert also bezüglich der L^1-Norm gegen f.

l) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als $f_k(x) = \begin{cases} \sin x & \text{falls } |x| < k\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Zeigen Sie, daß die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Sinusfunktion konvergiert!

Lösung: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt für alle $k > \dfrac{|x|}{\pi}$, daß $|x| < k\pi$ ist und damit $f_k(x) = \sin x$. Somit konvergiert die Folge der f_k punktweise gegen die Sinusfunktion.

m) Haben die Funktionen f_k kompakten Träger?

Lösung: Der Träger von f_k ist das abgeschlossene Intervall $[-k\pi, k\pi]$, also kompakt. Außerdem ist f_k stetig auf ganz $\mathbb{R}$: Für $x \ne \pm k\pi$ ist das klar, weil sowohl der Sinus als auch die Nullfunktion stetig sind, und an den Übergangsstellen $\pm k\pi$ gibt es auch keine Probleme, da der Sinus (und natürlich auch die Nullfunktion) dort verschwindet.

n) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Folge für die Sinusfunktion?

Lösung: Wir wissen bereits, daß die f_k Funktionen mit kompaktem Träger sind und überall, erst recht also fast überall, gegen die Sinusfunktion konvergieren. Zur approximierenden Folge fehlt noch die CAUCHY-Bedingung, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ muß es ein $N \in \mathbb{N}$ geben, so daß $\|f_\ell - f_k\|_1 < \varepsilon$ für alle $k, \ell \geq N$. Hier ist für $k \leq \ell$

$$\begin{aligned}\|f_\ell - f_k\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |f_\ell(x) - f_k(x)| = \int_{-\ell\pi}^{\ell\pi} |f_\ell(x) - f_k(x)|\, dx\\ &= \int_{-\ell\pi}^{-k\pi} |\sin x|\, dx + \int_{-k\pi}^{k\pi} 0\, dx + \int_{k\pi}^{\ell\pi} |\sin x|\, dx\\ &= 2(\ell - k) + 0 + 2(\ell - k) = 4(\ell - k)\,.\end{aligned}$$

Offensichtlich gibt es keine Chance, daß dies für alle $k, \ell \geq N$ unter *irgendeinem* $\varepsilon > 0$ bleibt; die Folge ist also keine CAUCHY-Folge und damit auch nicht approximierend.

o) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $g_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$g_k(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{falls } |x| \leq k \\ e^{-k^2}(k + 1 - |x|) & \text{falls } k < |x| < k + 1 \\ 0 & \text{sont} \end{cases}.$$

Ist $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Folge für die Funktion $g(x) = e^{-x^2}$?
Hinweis: Auch wenn wir es erst später beweisen werden, dürfen Sie verwenden, daß $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ ist.

Lösung: Wie aus der Vorlesung bekannt, sind die g_k Funktionen mit kompaktem Träger, und wie bei den Funktionen f_k aus den vorigen Aufgaben folgt auch sofort, daß die Folge der g_k punktweise gegen g konvergiert. Die Folge ist daher genau dann approximierend, wenn sie eine CAUCHY-Folge ist.

Da der Integrand e^{-x^2} stets positiv ist, folgt aus der Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$, daß

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{-k} e^{-x^2}\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{k}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 0$$

ist; daher gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so daß

$$0 < \int_{-\infty}^{-k} e^{-x^2}\, dx = \int_{k}^{\infty} e^{-x^2}\, dx < \frac{\varepsilon}{8}$$

für alle $k \geq N_1$. Erst recht ist dann natürlich auch für jedes $\ell \geq k$

$$0 < \int_{-\ell}^{-k} e^{-x^2}\, dx = \int_{k}^{\ell} e^{-x^2}\, dx < \frac{\varepsilon}{8}\,,$$

denn der Integrand ist ja positiv.

Da e^{-x^2} mit wachsendem Betrag von x monoton fällt, ist g_k in den Intervallen $[-k-1, -k]$ und $[k, k+1]$ höchstens gleich e^{-k^2}; da dies für $k \to \infty >$ gegen Null geht, gibt es auch ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so daß das Integral über g_k von $-k-1$ nach $-k$ *bzw.* von k nach $k+1$ jeweils kleiner $\varepsilon/8$ ist für $k \geq N_2$, den $k + 1 - |x|$ liegt im betrachteten Intervall zwischen null und eins. Für $k, \ell \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ und $\ell > k$ ist daher nach der Dreiecksungleichung $\|g_\ell - g_k\|_1 < \varepsilon$, wenn wir das Integral aufteilen in die Teilintegrale über die neun Intervalle $(-\infty, -\ell-1]$, $[-\ell-1, -\ell]$, $[-\ell, -k-1]$, $[-k-1, -k]$, $[-k, k]$, $[k, k+1]$, $[k+1, \ell]$, $[\ell, \ell+1]$ und $[\ell+1, \infty)$: Das Integral über $[-k, k]$ verschwindet, alle anderen sind kleiner als $\varepsilon/8$.