

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 29.+30. April 2013

a) Welche der folgenden Mengen ist eine Nullmenge?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

b) $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ seien zwei stetige Abbildungen auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Falls $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in D$, ist $f = g$.

c) Zeigen Sie, daß durch $f_k(x) = \max\{0, k - k^2|x|\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion aus $K^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert wird!

d) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f_k$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k$!

e) Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $K_1^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

f) Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $K_\infty^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

g) Gibt es eine Funktion f , gegen die $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert?

h) Gibt es eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gegen die $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ fast überall (punktweise) konvergiert?

i) Zeigen Sie: Für jede stetige Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} (f_k g) = g(0)$!

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung!

j) Für $r > 0$ sei $g_r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g_r(x) = \begin{cases} \frac{4r}{e^{(b-a)^2}} e^{\frac{-r}{(x-a)(b-x)}} & \text{falls } a < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß g_r eine Funktion mit kompaktem Träger ist und bestimmen Sie das Maximum von g_r !

k) Zeigen Sie, daß für die Folge der Funktionen $f_k = g_{1/k}$ und $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_k(x)| dx = 0!$$

Was bedeutet das für die Konvergenz der Folge?

Hinweis: Betrachten Sie für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ die drei Intervalle $[a, a + \delta]$, $[a + \delta, b - \delta]$ und $[b - \delta, b]$ getrennt!

l) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f_k(x) = \begin{cases} \sin x & \text{falls } |x| < k\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Zeigen Sie, daß die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Sinusfunktion konvergiert!

m) Haben die Funktionen f_k kompakten Träger?

n) Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine approximierende Folge für die Sinusfunktion?

o) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $g_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$g_k(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{falls } |x| \leq k \\ e^{-k^2}(k+1-|x|) & \text{falls } k < |x| < k+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine approximierende Folge für die Funktion $g(x) = e^{-x^2}$?

Hinweis: Auch wenn wir es erst später beweisen werden, dürfen Sie verwenden, daß $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ ist.