WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 22.+23. April 2013

a) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = x - |x|$!

Lösung: Für $x \geq 0$ ist $|x| = x$, so daß $f(x)$ verschwindet; für $x < 0$ ist $f(x) = 2x \neq 0$. Der Träger von f ist somit der Abschluß der Menge aller negativer reeller Zahlen, also $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

b) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = x - [x]$!

Lösung: $[x]$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x; somit verschwindet $f(x)$ genau dann, wenn x eine ganze Zahl ist; ansonsten ist $f(x) \neq 0$. Der Abschluß von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und damit der Träger von f ist daher $\mathbb{R}$.

c) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = \sin x - |\sin x|$!

Lösung: $f(x)$ ist genau dann von Null verschieden, wenn $\sin x < 0$ ist, wenn es also eine ganze Zahl k gibt, so daß $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$ ist. Der Träger von f ist daher die Vereinigung der *abgeschlossenen* Intervalle $[(2k-1)\pi,\ 2k\pi]$ über alle $k \in \mathbb{Z}$.

d) Welche der Funktionen aus den vorigen drei Aufgaben hat kompakten Träger?

Lösung: *Keine,* denn alle Träger sind unbeschränkt.

e) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt auch die Funktion $h(x) = f(x)^2 + g(x)^2$ in $K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Lösung: *Richtig:* $h(x)$ verschwindet genau dann, wenn sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ verschwinden. Ist also $h(x) \neq 0$, so muß auch mindestens eine der beiden Funktionen f und g in x einen von Null verschiedenen Wert haben. Damit liegt x in mindestens einem der beiden Träger, also auch in deren Vereinigung. Diese ist als Vereinigung zweier kompakter Mengen selbst kompakt, also liegt $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \neq 0\}$ in einer kompakten Menge. Diese ist insbesondere abgeschlossen und enthält daher auch den Abschluß von W, den Träger von h. Als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist dieser selbst kompakt.

f) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt der Träger von h in der Vereinigung der Träger von f und von g.

Lösung: *Richtig;* das folgt aus der Argumentation bei der vorigen Aufgabe.

g) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist der Träger von h die Vereinigung der Träger von f und von g.

Lösung: Die oben definierte Menge W ist die Vereinigung der Mengen $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ und $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \neq 0\}$; die Träger von h, f, g sind die Abschlüsse dieser Mengen. Die Behauptung folgt also, wenn wir zeigen können, daß der Abschlüß von $W = U \cup V$ gleich der Vereinigung der Abschlüsse von U und V ist. Da diese Vereinigung abgeschlossen ist, enthält sie den Abschluß von W. Um die Gleichheit nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß sie jeder Randpunkt von U oder V im Abschluß von W liegt. Sei also x ein Randpunkt von U. Dann gibt es eine offene Umgebung O von x, die sowohl

Punkte aus U als auch Punkte aus dem Komplement von U enthält. Falls letztere alle in V liegen, ist insbesondere $x \in V$, also erst recht $x \in W$. Andernfalls ist x ein Randpunkt von W, liegt also im Abschluß von W. Damit ist die Behauptung bewiesen.

h) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. Berechnen Sie $\int_Q f$ für das Quadrat Q mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$!

Lösung: Nach Definition ist

$$\begin{aligned}
\int_Q f &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} (1 - x^2 - y^2)\,dx \right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x - \frac{x^3}{3} - xy^2 \right)\Bigg|_{-1}^{1} dy = \int_{-1}^{1} \left(\left(1 - \frac{1}{3} - y^2\right) - \left(-1 + \frac{1}{3} + y^2\right) \right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{4}{3} - 2y^2 \right) dy \\
&= \frac{4y}{3} - \frac{2y^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

i) Berechnen Sie auch $\int_Q g$ für $g(x,y) = \max\{0, f(x,y)\}$, und interpretieren Sie diesen Wert geometrisch!

Lösung: Wenn wir y festhalten, ist $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 > 0$ genau dann, wenn $x^2 + y^2 < 1$ ist, wenn also (x,y) in der offenen Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt liegt. Wir können dies auch ausdrücken durch die Ungleichung

$$-\sqrt{1 - y^2} < x < \sqrt{1 - y^2}\,.$$

Für diese Punkte (x,y) ist $g(x,y) = f(x,y) > 0$, ansonsten ist $g(x,y) = 0$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\int_Q g &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} g(x,y)\,dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (1 - x^2 - y^2)\,dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(x - \frac{x^3}{3} - xy^2 \right)\Bigg|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(2\sqrt{1-y^2} - \frac{2}{3}(1-y^2)\sqrt{1-y^2} - 2y^2\sqrt{1-y^2} \right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{4}{3}\sqrt{1-y^2} - \frac{4}{3}y^2\sqrt{1-y^2} \right) dy = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy - \frac{4}{3}\int_{-1}^{1} y^2\sqrt{1-y^2}\,dy\,.
\end{aligned}$$

Für die beiden letzten Integrale kennen wir keine Stammfunktionen der Integranden, müssen also versuchen, die Integrale mit einer der uns bekannten Integrationsregeln umzuformen.

Wegen der Beziehung $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ bietet sich zumindest beim ersten Integral die Substitution $y = \sin t$ an. Da y von -1 nach 1 läuft, muß dabei t von $-\frac{\pi}{2}$ nach $\frac{\pi}{2}$ laufen. Dann ist

$$\sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t\,,$$

denn im betrachteten Intervall nimmt der Kosinus keine negativen Werte an. Weiter ist $dy = \cos t\, dt$, also

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt\,.$$

Auf letzteres Integral können wir die Regel zur partiellen Integration anwenden: In

$$\int u'v\, dt = uv - \int uv'\, dt$$

setzen wir $u = \sin t$ und $v = \cos t$; dann ist $u' = \cos t$ und $v' = -\sin t$, also

$$\begin{aligned}\int \cos^2 t\, dt &= \sin t \cos t + \int \sin^2 t\, dt = \sin t \cos t + \int (1-\cos^2 t)\, dt\\ &= \sin t \cos t + \int dt - \int \cos^2 t\, dt = \sin t \cos t + t - \int \cos^2 t\, dt\,,\end{aligned}$$

wobei die Integrationskonstante der Einfachheit halber weggelassen wurde. Bringen wir das Integral rechts auf die linke Seite, erhalten wir das Ergebnis

$$\int \cos^2 t\, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin t \cos t}{2} + C$$

und damit

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin t \cos t}{2}\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\,,$$

denn der Kosinus verschwindet an beiden Grenzen.

Für das zweite Integral liefert die Substitution $y = \sin t$ entsprechend, daß

$$\int y^2\sqrt{1-y^2}\, dy = \int \sin^2 t \cos^2 t\, dt$$

ist; auch hier könnten wir mit partieller Integration weitermachen, jedoch geht es wohl schneller, wenn wir den Integranden nach den EULERschen Formeln umformen:

$$\begin{aligned}\sin^2 t \cos^2 t &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = -\frac{(e^{2it}-e^{-2it})^2}{16} = -\frac{e^{4it}+e^{-4it}-2}{16}\\ &= \frac{1-\cos 4t}{8}\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_{-1}^{1} y^2\sqrt{1-y^2}\, dy = \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\cos 4t)\, dt = \frac{t}{8} - \frac{\sin 4t}{32}\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}\,,$$

denn der Sinus verschwindet bei $\pm 2\pi$.

Jetzt müssen wir nur noch alles zusammensetzen und erhalten

$$\int_Q g = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Bleibt noch die geometrische Interpretation: Der Punkt (x, y) hat den Abstand $r = \sqrt{x^2+y^2}$ vom Nullpunkt, und $f(x, y) = 1 - r^2$ hängt nur ab von diesem Abstand. Dasselbe gibt auch für $g(x, y) = \max(0, 1-r^2)$. Der Graph von g entsteht also durch Rotation der Parabel $z = 1 - x^2$ aus der (x, z)-Ebene im Bereich $-1 \le x \le 1$ um die z-Achse; er sieht ungefähr aus wie ein Zuckerhut. Das Integral gibt sein Volumen an.

j) Existiert $\int_{\mathbb{R}^n} g$?

Lösung: Wie wir bei der vorigen Aufgabe gesehen haben, verschwindet g außerhalb der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 1$. Träger von g ist somit die kompakte abgeschlossene

Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$, d.h. g hat kompakten Träger, und damit existiert das Integral. Da der Träger ganz im Quadrat Q aus der vorigen Aufgabe liegt, hat es denselben Wert wie das dortige Integral über Q.

k) Stellen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \int\limits_1^2 \frac{\cos(x+t)}{x^2+t^2}\,dt$ als Integral dar!

Lösung: Da wir über das Intervall $[1, 2]$ integrieren, ist der Nenner des Integranden überall mindestens gleich eins; der Integrand ist also stetig und er ist auch partiell differenzierbar nach x: Nach der Quotientenregel ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\cos(x+t)}{x^2+t^2} = \frac{-(x^2+t^2)\cdot\sin(x+t) - 2x\cdot\cos(x+t)}{(x^2+t^2)^2}\,.$$

Somit ist nach dem Lemma aus der Vorlesung die Integration über t vertauschbar mit der Ableitung nach x, d.h.

$$f'(x) = -\int\limits_1^2 \frac{(x^2+t^2)\cdot\sin(x+t) + 2x\cdot\cos(x+t)}{(x^2+t^2)^2}\,dt\,.$$

l) Zeigen Sie, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig darstellen läßt in der Form $\frac{1}{2}m(m+1)+\ell$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq \ell \leq m+1$, und folgern Sie, daß die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(k,\ell) = \frac{1}{2}(k+\ell-2)(k+\ell-1)+\ell$ bijektiv ist!

Lösung: $S_m = \frac{1}{2}m(m+1)$ ist die Summe der ersten m natürlichen Zahlen. Damit ist klar, daß die Folge der S_m streng monoton wächst; es gibt also zu jeder natürlichen Zahl n genau ein $m \in \mathbb{N}_0$, so daß $S_m < n \leq S_{m+1}$ ist. Ebenfalls wegen der Summeninterpretation ist $S_{m+1} - S_m = m+1$; schreiben wir also $n = S_m + \ell$, muß $1 \leq \ell \leq m+1$ sein.
Diese Darstellung ist eindeutig, denn ist $n = S_m + \ell$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq \ell \leq m+1$, so ist $S_m < n \leq S_m + (m+1) = S_{m+1}$, womit m und damit natürlich auch ℓ eindeutig bestimmt wäre.
Betrachten wir nun die Abbildung φ. Zunächst ist $\varphi(k,\ell)$ für alle $k,\ell \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, denn $k+\ell-2 \geq 0$, so daß der erste Summand in $\mathbb{N}_0$ liegt, die Summe also wegen $\ell \geq 1$ in $\mathbb{N}$.
Die Bijektivität läßt sich am einfachsten nachweisen, indem wir eine Umkehrabbildung $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ konstruieren: Wir schreiben eine vorgegebene natürliche Zahl n als $S_m + \ell$ mit $1 \leq \ell \leq m+1$ und setzen $k = m+2-\ell$. Dann ist $k \in \mathbb{N}$ und

$$S_m + \ell = \frac{m(m+1)}{2} + \ell = \frac{k+\ell-2)(k+\ell-1)}{2} + \ell = \varphi(k,\ell)\,;$$

wir setzen also $\psi(n) = (k,\ell)$: Wie wir gerade gesehen haben, ist $\varphi\circ\psi$ die Identität auf $\mathbb{N}$; starten wir umgekehrt mit $(k,\ell) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, so ist $\varphi(k,\ell) = S_{k+l-2} + \ell$ und $1 \leq \ell \leq k+\ell-1$, also $\psi\big(\varphi(n)\big) = (k,\ell)$.

m) Zeigen Sie mit Hilfe der Abbildung φ, daß für zwei abzählbar unendliche Mengen A und B auch die Menge $A\times B$ abzählbar unendlich ist! und daß auch für jede natürliche Zahl n A^n abzählbar unendlich ist!

Lösung: Wegen der Abzählbarkeit von A und B gibt es bijektive Abbildungen $\psi\colon \mathbb{N} \to A$ und $\omega\colon \mathbb{N} \to B$. Dann ist auch die Abbildung

$$\Psi\colon \begin{cases} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to A\times B \\ (k,\ell) \mapsto \big(\psi(k),\psi(\ell)\big) \end{cases}$$

bijektiv, und $\Psi\circ\varphi\colon \mathbb{N} \to A\times A$ ist die gewünschte Bijektion.

n) Folgern Sie, daß für eine abzählbar unendliche Menge A und eine natürliche Zahl n auch A^n abzählbar unendlich ist!

Lösung: Wir beweisen die Abzählbarkeit von A^n durch vollständige Induktion: Für $n = 1$ ist $A^1 = A$ natürlich abzählbar. Falls wir für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits wissen, daß A^n abzählbar ist, schreiben wir $A^{n+1} = A \times A^n$ und können die vorige Aufgabe auf $B = A^n$ anwenden.

o) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind Nullmengen?

$$A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \qquad B = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}, \qquad C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y \in \mathbb{Q}\right\},$$
$$D_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |xy| < a\right\} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

Lösung: $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist als Produkt zweier abzählbarer Mengen selbst abzählbar, also Nullmenge. $B = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ ist zwar nicht abzählbar, aber trotzdem Nullmenge, denn für jedes $x \in \mathbb{Q}$ ist $\mathbb{R} \times \{x\} = \left\{(y, x) \;\middle|\; y \in \mathbb{R}\right\}$ eine Nullmenge, und die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.
Aus demselben Grund ist auch C eine Nullmenge, denn für jedes $q \in \mathbb{Q}$ ist

$$C_q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y = q\right\} = \left\{(x, q - x) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\}$$

eine Nullmenge, und C ist die Vereinigung der abzählbar vielen C_q.
D_a ist für kein $a > 0$ eine Nullmenge, denn das offene Quadrat mit Ecken $(\pm\sqrt{a}, \pm\sqrt{a})$ liegt ganz in D_a. Da jede Überdeckung von D_a durch Rechtecke insbesondere dieses Quadrat überdecken muß, ist die Summe der Volumina der Überdeckungsquader daher mindestens gleich $4a$ und damit unmöglich kleiner als ein $\varepsilon < 4a$. Für $a < 0$ ist $D = \emptyset$ natürlich eine Nullmenge; für $a = 0$ besteht D_a aus den beiden Koordinatenachsen, also zwei Nullmengen, und auch deren Vereinigung ist eine Nullmenge.

p) *Richtig oder falsch:* Sind $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ Nullmengen, so ist auch $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge.

Lösung: *Richtig:* Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da A und B Nullmengen sind, gibt es abzählbare Quaderüberdeckungen von A und B mit Gesamtvolumen jeweils kleiner als $\sqrt{\varepsilon}$. Nehmen wir nun alle Quader der Form $Q_i \times Q_j$, wobei Q_i einer der Quader aus der Überdeckung von A ist und Q_j entsprechend von B, so ist die Menge aller dieser Quader abzählbar und sie überdecken $A \times B$. Für festes i ist das Volumen der sämtlichen Quader $Q_i \times Q_j$ das Volumen von Q_i mal der Summe der Volumina derQ_j, also kleiner als $\mu(Q_i)\sqrt{\varepsilon}$. Summieren wir nun noch über alle i, erhalten wir eine Summe kleiner $\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$.