Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15+16. April 2013

a) *Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert auf dem abgeschlossenen Intervall $[-10, 10]$ gleichmäßig gegen e^x.

b) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion?

c) $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, und für ein (nicht notwendigerweise endliches) abgeschlossenes Intervall $I \subseteq D$ sei $f(I) \subseteq I$. Außerdem gebe es eine reelle Zahl $M < 1$, so daß $|f'(x)| \leq M$ ist für alle $x \in I$. Zeigen Sie, daß es dann genau ein $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$!

d) Was liefert Ihnen die vorige Aufgabe für die Konvergenz des Verfahrens von Heron?

e) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = e^{-x^2} - x$ genau eine Nullstelle hat, und geben Sie eine Folge an, die gegen diese Nullstelle konvergiert!

f) *Richtig oder falsch:* V sei ein Banach-Raum, und die Abbildung $f\colon V \to V$ erfülle die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes. Dann ist f gleichmäßig stetig auf V.

g) V sei ein vollständiger normierter Vektorraum, und die Abbildung $f\colon V \to V$ erfülle für alle $x, y \in V$ und ein festes $q \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\|f(x) - f(y)\| \leq q\,\|x - y\|$. Weiter sei x^* ein Fixpunkt von f, $x_0 \in V$ ein beliebiger Punkt, und für $k \in \mathbb{N}$ sei x_k rekursiv definiert durch $x_k = f(x_{k-1})$. Zeigen Sie:

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{q^k}{1-q}\,\|x_1 - x_0\|\,.$$

h) Berechnen Sie für $f_0(x) \equiv 1$ die ersten Glieder der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) = 1 + \int_0^x 2t\big(f_{n-1}(t) - 2\big)\,dt \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und erraten Sie den Grenzwert!

i) Zeigen Sie, daß die erratene Funktion die Gleichungen

$$f(x) = 1 + \int_0^x 2t\big(f(t) - 2\big)\,dt \quad \text{und} \quad f'(x) = 2x\big(f(x) - 2\big)$$

erfüllt!

j) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ keinen Fixpunkt hat, daß aber trotzdem gilt: $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ für alle $x \neq y$ aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$! Warum widerspricht dies nicht dem Banachschen Fixpunktsatz?

k) V sei ein Banach-Raum, $f\colon D \to V$ eine stetige Abbildung auf $D \subseteq V$ und $K \subseteq D$ eine kompakte Teilmenge mit $f(K) \subseteq K$. Zeigen Sie: Wenn $\|f(y) - f(x)\| < \|y - x\|$ für alle $x, y \in K$, hat f mindestens einen Fixpunkt auf K.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz über Maxima und Minima auf kompakten Mengen.

l) Q sei das Rechteck mit Ecken $(0,0)$ und $(\pi, 4)$. Berechnen Sie die folgenden Integrale jeweils für beide möglichen Anordnungen der Variablen x und y:

$$\int_Q xy, \qquad \int_Q y \sin 2x, \qquad \int_Q xye^{2x}, \qquad \int_Q (2 - 3y \sin xy)\,!$$