Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 8.+9. April 2013

a) Welche der folgenden Mengen sind konvex, welche wegzusammenhängend und welche zusammenhängend?

$$\begin{array}{ll}
A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 < 5\right\}, & B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 \leq 5\right\} \\
C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 = 5\right\}, & D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 \neq 5\right\} \\
E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 \geq 5\right\}, & F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 > 5\right\} \\
G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-4y^2 < 5\right\}, & H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-4y^2 \leq 5\right\} \\
I = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-4y^2 = 5\right\}, & J = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-4y^2 \neq 5\right\} \\
K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-4y^2 \geq 5\right\}, & L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-4y^2 > 5\right\}
\end{array}$$

b) Ist $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1 \quad \text{oder} \quad xy = 0\right\}$ wegzusammenhängend oder zusammenhängend?

c) Zeigen Sie: Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, wenn sie kompakt und zusammenhängend ist.

d) Die *Lemniskate* zum Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\mathcal{L}_a = \left\{ \left(\frac{a \cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{a \sin t \cos t}{1+\sin^2 t} \right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}_a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ zusammenhängend und kompakt ist!

e) Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}_3$ nichtleeren Durchschnitt mit der Hyperbel $\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ hat! *Hinweis:* Betrachten Sie den Wertebereich der Funktion $f(x,y) = xy$ auf $\mathcal{L}_3$!

f) Zeigen Sie, daß das nichtlineare Gleichungssystem

$$x^4 + y^4 = 2 \quad \text{und} \quad x^3 + 2xy^2 + 3xy^3 + 5y^5 = 4$$

mindestens eine reelle Lösung hat!

g) Zeigen Sie: Es gibt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2 < \frac{\pi}{2}$ und $\tan(x^2+y^2) = e^{xy}\cos(\pi x^2)$!

h) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen, so ist die Folge der Paare (x_n, x_{n+1}) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^2$.

i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, x_1 eine reelle Zahl, und durch $x_n = f(x_{n-1})$ für $n \geq 2$ sei rekursiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Zeigen Sie: Konvergiert diese Folge gegen ein $x \in \mathbb{R}$, so ist x ein Fixpunkt von f!

j) Zeigen Sie: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_1 = a$ und $x_n = \sin x_{n-1}$ für $n \geq 2$ gegen Null!

k) Finden Sie alle Fixpunkte der Funktion $f(x) = x^2 + c$ und entscheiden Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ diese stabil sind!

l) Finden Sie alle Fixpunkte von $f \circ f$ und entscheiden Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ diese stabil sind!

m) Zur stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gebe es im Intervall $[a, b]$ einen Punkt c mit $f(c) < a$ und einen Punkt d mit $f(d) > b$. Zeigen Sie, daß es mindestens ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = x$.