WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18.+19. März 2013

a) Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so sind die Mengen

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(x) \le 0\right\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(x) = 0\right\} \quad \text{und} \quad C = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(x) \ge 0\right\}$$

abgeschlossen, während

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(x) < 0\right\}, \quad E = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(x) \ne 0\right\} \quad \text{und} \quad F = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(x) > 0\right\}$$

offen sind.

Lösung: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild einer jeden offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist. Da sowohl die negativen als auch die positiven Zahlen eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ bilden, sind D und F offen und damit auch $E = D \cup F$.
A, B und C sind die Komplemente der offenen Mengen F, E und D, also abgeschlossen.

b) Kann es Funktionen f geben, für die eine der Mengen A, B, C offen oder eine der Mengen D, E, F abgeschlossen ist?

Lösung: Nehmen wir für f die konstante Funktion eins (oder, für alle die es komplizierter wollen, $f(x_1, \dots, x_n) = 1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$), so sind $A = B = \emptyset$ und $C = \mathbb{R}^n$ offen und $D = \emptyset$ sowie $E = F = \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

c) Zeigen Sie, daß die Intervalle $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ eine offene Überdeckung sowohl des Intervalls $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ als auch des Intervalls $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ bilden. Für welches der beiden Intervalle gibt es eine endliche Teilüberdeckung, welches ist kompakt?

Lösung: Da bereits $(0, 1)$ beide Intervalle enthält, ist die Überdeckungseigenschaft klar; außerdem ist auch klar, daß in beiden Fällen die nur aus $(0, 1)$ bestehende Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung ist. Kompakt ist natürlich nur das abgeschlossene Intervall $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$.

d) $\mathfrak{U}$ sei die Menge, deren Elemente die offenen Mengen

$$U_{a,b} \underset{\text{def}}{=} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-a)^2 + (y-b)^2 < 1\right\}$$

mit $-1 \le a, b \le 1$ sind. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung des Rechtecks

$$R \underset{\text{def}}{=} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2} \;\text{ und }\; -\frac{3}{2} \le y \le \frac{3}{2}\right\}$$

ist, und finden Sie eine endliche Teilüberdeckung!

Lösung: Wir müssen zeigen, daß jeder Punkt $(x, y) \in R$ in mindestens einer der Mengen $U_{a,b}$ liegt. Falls $|x|$ und $|y|$ kleiner oder gleich eins sind, können wir einfach die Menge $U_{x,y}$ nehmen. Ist $|x| \le 1$ aber $|y| > 1$, so liegt (x, y) je nach Vorzeichen von y in einer der beiden Mengen $U_{x,1}$ und $U_{x,-1}$; entsprechend liegt der Punkt im Fall $|x| > 1$ und $|y| \le 1$ in einer der beiden Mengen $U_{1,y}$ und $U_{-1,y}$. Sind schließlich beide Beträge größer als eins, so liegt (x, y) in einer der vier Mengen $U_{\pm1,\pm1}$, denn eine der Zahlen $|x-1|$ und $|x+1|$ ist kleiner als $\frac{1}{2}$, genauso auch eine der Zahlen $|y-1|$ und $|y+1|$; da die Summe von deren Quadratenen kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, liegt (x, y) in einer der vier Kreisscheiben.
Mit dem gleichen Argument können wir auch eine endliche Teilüberdeckung angeben: Zu jedem $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ gibt es ein

$$a \in M \underset{\text{def}}{=} \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\},$$

so daß $|x-a| < \frac{1}{2}$ ist und zu y ein $b \in M$ mit $|y-b| < \frac{1}{2}$; damit liegt jeder Punkt $(x,y) \in R$ in einer der 25 Mengen $M_{a,b}$ mit $a,b \in M$. (Das ist natürlich nicht die kleinste endliche Teilüberdeckung!)

e) Finden Sie eine offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ der offenen Kreisscheibe

$$D \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 2\right\},$$

die keine endliche Teilüberdeckung hat!

Lösung: Wir können zum Beispiel die Überdeckung aus den offenen Kreisscheiben

$$U_n \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 < 2-\frac{1}{n}\right\}$$

betrachten. Alle zusammen überdecken D, aber die Vereinigung endlich vieler U_n ist einfach die Menge U_n mit den größten Index n, und die ist kleiner als D.

f) Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

$$\begin{array}{ll}
A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+3y^2 < 5\right\}, & B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+3y^2 \le 5\right\} \\
C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+3y^2 = 5\right\}, & D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+3y^2 \ne 5\right\} \\
E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+3y^2 \ge 5\right\}, & F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+3y^2 > 5\right\} \\
G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-3y^2 < 5\right\}, & H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-3y^2 \le 5\right\} \\
I = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-3y^2 = 5\right\}, & J = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-3y^2 \ne 5\right\} \\
K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-3y^2 \ge 5\right\}, & L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-3y^2 > 5\right\}
\end{array}$$

Lösung: Die Mengen A, D, F, G, J, L sind nicht abgeschlossen, da sie beispielsweise ihren Randpunkt $(\sqrt{5}, 0)$ nicht enthalten; E, F, H, I, J, K und L sind nicht beschränkt. Somit kommen höchstens B und C in Frage. Wie wir aus Aufgabe *a)* wissen, sind beide abgeschlossen, und beide sind auch beschränkt, da $|x|$ und $|y|$ auf jeden Fall kleiner als drei sein müssen. Somit sind diese beiden Mengen kompakt.

g) Finden Sie das absolute Maximum und das absolute Minimum der Funktion $f(x,y) = x^3+y^3$ unter der Nebenbedingung $x^2+2y^2 \le 5$!

Lösung: Da $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+2y^2 \le 5\}$ kompakt ist (es handelt sich um eine ellipsenförmige Scheibe), muß f in K sowohl sein Maximum als auch sein Minimum annehmen. Falls dies in einem inneren Punkt geschähe, müßte dort wegen der Differenzierbarkeit von f der Gradient verschwinden.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$

verschwindet aber nur im Nullpunkt; dort ist offensichtlich weder ein Maximum noch ein Minimum. (Betrachten Sie die Funktion $h(x) = x^3$.)

Somit liegen sowohl das Maximum als auch das Minimum auf dem Rand; dort ist also $g(x,y) = x^2+2y^2-5 = 0$. Da auch der Gradient von g nur im Nullpunkt verschwindet, für den $g(0,0) = -5$ nicht verschwindet, muß es für jeden Punkt (x,y) mit $g(x,y) = 0$, für den $f(x,y)$ maximal oder minimal wird, ein $\lambda \ne 0$ geben, so daß

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)\,, \quad \text{das heißt} \quad \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}$$

ist. Wir haben also die beiden Gleichungen

$$3x^2 - 2\lambda x = x(3x-2\lambda) = 0 \quad \text{und} \quad 3y^2 - 4\lambda y = y(3y-4\lambda) = 0\,.$$

Die erste Gleichung ist erfüllt, wenn entweder $x = 0$ ist oder $\lambda = \frac{3}{2}x$. Im ersten Fall können wir y über die Nebenbedingung $x^2+2y^2 = 5$ bestimmen: Offensichtlich kommen nur $y = \pm\sqrt{5/2}$ in Frage, und zu beiden Werten läßt sich ein λ finden, so daß $3y-4\lambda$ verschwindet.

Entsprechend ist die zweite Gleichung erfüllt, wenn y verschwindet oder aber $\lambda = \frac{3}{4}y$; im ersten Fall führt die Nebenbedingung auf $x = \pm\sqrt{5}$, und dazu gibt es natürlich ein λ, für das $3x - 2\lambda$ verschwindet.

Bleibt noch der Fall, daß x und y beide von Null verschieden sind. Dann ist $3x = 2\lambda$ und $3y = 4\lambda$, also $y = 2x$. Einsetzen in die Nebenbedingung zeigt, daß dann $9x^2 = 5$ sein muß, d.h. $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{5}$ und $y = 2x$.

Für das gesuchte Maximum und Minimum kommen damit nur folgende sechs Punkte in Frage:

$$\left(0, \pm\sqrt{5/2}\right), \quad \left(\pm\sqrt{5}, 0\right) \quad \text{und} \quad \pm\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{5}, \tfrac{2}{3}\sqrt{5}\right).$$

Die Funktionswerte dort sind

$$\pm\frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad \pm 5\sqrt{5} \quad \text{und} \quad \pm\frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

Da wir wissen, daß sowohl Maximum als auch Minimum angenommen werden, müssen wir diese Werte miteinander vergleichen; offensichtlich ist $5\sqrt{5}$ der betragsgrößte Wert. Das absolute Maximum wird daher angenommen im Punkt $\left(\sqrt{5}, 0\right)$ und das absolute Minimum im Punkt $\left(-\sqrt{5}, 0\right)$; die Funktionswerte dort sind $\pm 5\sqrt{5}$.

h) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung zweier kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Lösung: *Richtig:* Ist $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung der Vereinigung $A \cup B$ zweier kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so ist $\mathfrak{U}$ auch eine offene Überdeckung von sowohl A als auch B. Zur Überdeckung von A reicht wegen der Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung $\mathfrak{U}_1$, für B entsprechend eine endliche Teilüberdeckung $\mathfrak{U}_2$, und damit ist $\mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2$ eine endliche Teilüberdeckung von $A \cup B$.

i) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung beliebig vieler kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Lösung: Das ist natürlich falsch: Beispielsweise ist jede einelementige Menge kompakt, da abgeschlossen und beschränkt; also läßt sich jede beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ als Vereinigung kompakter Mengen schreiben, aber nicht jede Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Konkretes Beispiel: Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $K_n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - (n, \dots, n)\| < 1\}$. Selbstverständlich ist jede der Mengen K_n kompakt, egal welche Norm wir nehmen, aber die Vereinigung aller K_n ist unbeschränkt und damit nicht kompakt.

j) *Richtig oder falsch:* Sind $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, so ist auch $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ kompakt.

Lösung: *Richtig:* Wir arbeiten mit den Maximumsnormen auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^{n+m}$. Da X und Y als kompakte Mengen beschränkt sind, gibt es reelle Zahlen N, M, so daß

$$\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \le N \quad \text{für alle } x = (x_1, \dots, x_n) \in X$$

und

$$\|y\| = \max\{|y_1|, \dots, |y_m|\} \le M \quad \text{für alle } y = (y_1, \dots, y_m) \in Y$$

Damit ist $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\} \le \max\{N, M\}$ für alle $(x, y) \in X \times Y$, so daß auch $X \times Y$ beschränkt ist.

Um zu zeigen, daß $X \times Y$ auch abgeschlossen ist, müssen wir zeigen, daß das Komplement offen ist. Sei also $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus X \times Y$. Dann ist $x \notin X$ oder $y \notin Y$ oder beides. Indem wir nötigenfalls die Reihenfolge der Faktoren vertauschen, können wir annehmen, daß $x \notin X$. Da $\mathbb{R}^n \setminus X$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $u \notin X$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - u\| < \varepsilon$.

Ist $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ein Punkt mit $\|(x, y) - (u, v)\| \le \varepsilon$, so ist insbesondere $\|x - u\| < \varepsilon$; also $u \notin X$ und damit auch $(u, v) \notin X \times Y$. Somit ist $X \times Y$ auch abgeschlossen, also kompakt.