

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18.+19. März 2013

a) Zeigen Sie: Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so sind die Mengen

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} \quad \text{und} \quad C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq 0\}$$

abgeschlossen, während

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}, \quad E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\} \quad \text{und} \quad F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$$

offen sind.

b) Kann es Funktionen f geben, für die eine der Mengen A, B, C offen oder eine der Mengen D, E, F abgeschlossen ist?

c) Zeigen Sie, daß die Intervalle $(0, \frac{1}{n})$ eine offene Überdeckung sowohl des Intervalls $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ als auch des Intervalls $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ bilden. Für welches der beiden Intervalle gibt es eine endliche Teilüberdeckung, welches ist kompakt?

d) \mathcal{U} sei die Menge, deren Elemente die offenen Mengen

$$\mathcal{U}_{a,b} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 < 1\}$$

mit $-1 \leq a, b \leq 1$ sind. Zeigen Sie, daß \mathcal{U} eine offene Überdeckung des Rechtecks

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}\}$$

bilden, und finden Sie eine endliche Teilüberdeckung!

e) Finden Sie eine offene Überdeckung \mathcal{U} der offenen Kreisscheibe

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2\},$$

die keine endliche Teilüberdeckung hat!

f) Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 < 5\}, & B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \leq 5\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 = 5\}, & D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \neq 5\} \\ E &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \geq 5\}, & F &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 > 5\} \\ G &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 < 5\}, & H &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 \leq 5\} \\ I &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 5\}, & J &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 \neq 5\} \\ K &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 \geq 5\}, & L &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 > 5\} \end{aligned}$$

g) Finden Sie das absolute Maximum und das absolute Minimum der Funktion $f(x, y) = x^3 + y^3$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 \leq 5$!

h) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung zweier kompakter Teilmengen von \mathbb{R}^n ist kompakt.

i) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung beliebig vieler kompakter Teilmengen von \mathbb{R}^n ist kompakt.

j) *Richtig oder falsch:* Sind $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, so ist auch $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ kompakt.