WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11.-12. März 2013

a) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion, und (x_0, y_0) sei ein Punkt, in dem $F(x_0, y_0)$ verschwindet, aber $\nabla F(x_0, y_0)$ nicht der Nullvektor ist. Zeigen Sie, daß die Tangente in (x_0, y_0) an die Kurve

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; F(x, y) = 0 \right\}$$

die durch

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

definierte Gerade ist!

Lösung: Nach Definition der Differenzierbarkeit ist

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = F(x_0, y_0) + \left\langle \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \nabla F(x_0, y_0) \right\rangle + o\left(\left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\| \right) .$$

Falls (x_0+h, y_0+h) auf der durch $F(x, y) = 0$ definierten Kurve liegt, verschwinden sowohl $F(x_0, y_0)$ als auch $F(x_0 + h, y_0 + k)$, also geht das Skalarprodukt von $\binom{h}{k}$ mit $\nabla F(x_0, y_0)$ schneller gegen Null als die Norm von $\binom{h}{k}$. Die Punkte $(x_0 + h, y_0 + k)$, für die dieses Skalarprodukt verschwindet, liegen somit auf einer Geraden, die die Kurve in (x_0, y_0) berührt, also auf der Tangenten. Mit $h = x - x_0$ und $k = y - y_0$ ergibt sich die behauptete Gleichung.

b) $F, G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbare Funktionen, und (x_0, y_0) sei ein Punkt, in dem sowohl F als auch G verschwinden, nicht aber ∇F und ∇G. Zeigen Sie, daß sich die Kurven

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; F(x, y) = 0 \right\} \quad \text{und} \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; G(x, y) = 0 \right\}$$

im Punkt (x_0, y_0) genau dann berühren, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

$$\nabla F(x_0, y_0) = \lambda \nabla G(x_0, y_0) .$$

Lösung: Nach der vorigen Aufgabe liegen auf der Tangenten an C im Punkt (x_0, y_0) genau die Punkte (x, y), für die der Vektor $\binom{x-x_0}{y-y_0}$ senkrecht auf dem Gradienten von F in (x_0, y_0) steht; auf der Tangente an D liegen entsprechend die, für die dieser Vektor senkrecht auf dem Gradienten von G steht. Die beiden Geraden stimmen genau dann überein, wenn die beiden Gradienten proportional sind, und da nach Voraussetzung keiner der beiden der Nullvektor ist, kann man jeden der beiden als Vielfaches des anderen schreiben.

c) Berechnen Sie die HESSE-Matrizen der folgenden Funktionen:

$f_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$ $\qquad f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \sin x \cos y$

$f_3: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2}$ $\qquad f_4: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \arctan x + y$

Lösung:

$$\nabla f_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3yz \\ 3y^2 + 3xz \\ 3z^2 + 3xy \end{pmatrix}, \quad H_{f_1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 3z & 3y \\ 3z & 6y & 3x \\ 3y & 3x & 6z \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_2(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x \cos y \\ -\sin x \sin y \end{pmatrix}, \quad H_{f_2}(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_3(x, y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} \\ 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \quad H_{f_3}(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_4(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+x^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_{f_4}(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Berechnen Sie die vollständige TAYLOR-Reihe von f_1 um den Punkt $(0,0,0)$!

Lösung: Das ist natürlich gerade f_1 selbst.

e) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_1 um den Punkt $(1,0,0)$!

Lösung: $f_1(1+h,j,k) = (1+h)^3 + j^3 + k^3 + 3(1+h)jk = 1 + 3h + 3h^2 + 3jk +$ Terme vom Grad drei. Somit ist das TAYLOR-Polynom zweiten Grades gleich $1+3h+3h^2+3jk$.
Alternativ: Wir kennen bereits Gradient und HESSE-Matrix von f_1; an der Stelle $(1,0,0)$ ist

$$\nabla f_1(1,0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_{f_1}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist das TAYLOR-Polynom zweiten Grades gleich

$$f_1(1,0,0) + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ j \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h\ j\ k) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ j \\ k \end{pmatrix}$$
$$= 1 + 3h + \frac{6h^2 + 3jk + 3kj}{2} = 1 + 3h + 3h^2 + 3jk\,.$$

f) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_2 bis f_4 um den Nullpunkt!

Lösung: $f_2(x,y) = \sin x \cos y$ hat als TAYLOR-Reihe natürlich das Produkt der TAYLOR-Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{und} \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots;$$

das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_2 ist daher x, denn alle sonstigen Terme des Produkts haben höheren Grad als zwei.
Genauso können wir bei $f_3(x,y) = e^{x^2+y^2}$ einfach $z = x^2 + y^2$ in die TAYLOR-Reihe $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ einsetzen und alle Terme vom Grad größer zwei in x, y weglassen; das Ergebnis ist $1 + x^2 + y^2$.
Für $f_4(x) = \arctan x + y$ müssen wir einfach y zum TAYLOR-Polynom des Arkustangens addieren. Wegen

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

ergibt sich $x + y$ als TAYLOR-Polynom zweiten Grades.

g) Berechnen Sie die HESSE-Matrix der Funktion $g(x,y,z) = \sin(xy + yz + xz) + e^{2x+3y+5z}$!

Lösung:

$$\begin{aligned}
g_x(x,y,z) &= (y+z)\cos(xy+yz+xz) + 2e^{2x+3y+5z} \\
g_y(x,y,z) &= (x+z)\cos(xy+yz+xz) + 3e^{2x+3y+5z} \\
g_z(x,y,z) &= (x+y)\cos(xy+yz+xz) + 5e^{2x+3y+5z} \\
g_{xx}(x,y,z) &= -(y+z)^2\sin(xy+yz+xz) + 4e^{2x+3y+5z} \\
g_{xy}(x,y,z) &= -(x+z)(y+z)\sin(xy+yz+xz) + \cos(xy+yz+xz) + 6e^{2x+3y+5z} = g_{yx}(x,y,z) \\
g_{xz}(x,y,z) &= -(x+y)(y+z)\sin(xy+yz+xz) + \cos(xy+yz+xz) + 10e^{2x+3y+5z} = g_{yx}(x,y,z) \\
g_{yy}(x,y,z) &= -(x+z)^2\sin(xy+yz+xz) + 9e^{2x+3y+5z} \\
g_{yz}(x,y,z) &= -(x+y)(x+z)\sin(xy+yz+xz) + \cos(xy+yz+xz) + 15e^{2x+3y+5z}s = g_{zy}(x,y,z) \\
g_{zz}(x,y,z) &= -(x+y)^2\sin(xy+yz+xz) + 25e^{2x+3y+5z}
\end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$S = \sin(xy + yz + xz), \quad C = \cos(xy + yz + xz) \quad \text{und} \quad E = e^{3x+3y+5z}$$

ist somit $H_f(x, y, z) =$

$$\begin{pmatrix} -(y+x)^2S + 4\,E & -(x+z)(y+z)S + C + 6\,E & -(x+y)(y+z)S + C + 10\,E \\ -(x+z)(y+z)S + C + 6\,E & -(x+z)^2S + 9\,E & -(x+y)(x+z)S + C + 15\,E \\ -(x+y)(y+z)S + C + 10\,E & -(x+y)(x+z)S + C + 15\,E & -(x+y)^2S + 25\,E \end{pmatrix}.$$

h) Berechnen Sie die TAYLOR-Polynome vom Grad drei um den Punkt $(0,0)$ von

$$f(x, y) = e^x \sin y \quad \text{und} \quad g(x, y) = \cos(x - y)\sin(x + y)\,!$$

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten. Die TAYLOR-Reihen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \quad \text{und} \quad \sin y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} - \cdots$$

sind (hoffentlich) wohlbekannt; multipliziert man sie miteinander und läßt alle Terme vom Grad größer drei weg, ergibt sich das gesuchte TAYLOR-Polynom zu

$$T_3(x, y) = y + xy + \frac{x^2y}{2} - \frac{y^3}{6}.$$

Für das TAYLOR-Polynom von g gehen wir natürlich aus von den beiden TAYLOR-Reihen

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots \quad \text{und} \quad \sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots\ ,$$

in die wir $x-y$ *bzw.* $x+y$ einsetzen müssen. Dabei hilft uns, daß in $(x \pm y)^n$ ausschließlich Monome vom Grad n vorkommen; wir müssen also nur Potenzen mit Exponent höchstens drei berücksichtigen. Das gesuchte TAYLOR-Polynom besteht also aus allen Termen vom Grad höchsten drei des Produkts

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{(x-y)^2}{2}\right)\left(x + y - \frac{(x+y)^3}{6}\right) \\ &= x + y - \frac{(x-y)^2(x+y)}{2} - \frac{(x+y)^3}{6} + \frac{(x-y)^2(x+y)^3}{24}, \end{aligned}$$

d.h. aus allen Summanden außer dem letzten, und ist somit

$$\begin{aligned} T_3(x, y) &= x + y - \frac{(x^2-y^2)(x-y)}{2} - \frac{(x+y)^3}{6} \\ &= x + y - \frac{x^3 - x^2y - xy^2 + y^3}{2} - \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{6} \\ &= x + y - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}y^3. \end{aligned}$$

i) Welche quadratische Form definiert die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

Lösung: $Q(x, y, z) = (\,x \quad y \quad z\,)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\,x \quad y \quad z\,)\begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 2z \\ 3x + 2y + z \end{pmatrix}$

$$= x^2 + 2xy + 3xz + 2yx + 2yz + 3zx + 2zy + z^2 = x^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 4yz.$$

j) Welche symmetrische Matrix führt zu $Q(x, y) = (x + 2y)^2$?

Lösung: $Q(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$; da die quadratische Form zu Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ gleich $ax^2 + 2bxy + dy^2$ ist, muß hier also $a = 1$, $b = 2$ und $d = 4$ sein, d.h. die Matrix ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

k) Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen positiv *bzw.* negativ definit oder indefinit sind oder keine dieser Eigenschaften haben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\det A = 5 - 4 = 1 > 0$ und auch der Eintrag links oben ist positiv; also ist A positiv definit.

$\det B = 4 - 4 = 0$ verschwindet; die Matrix ist weder positiv noch negativ definit noch indefinit. (Sie ist aber positiv semidefinit, denn die zugehörige quadratische Form ist $x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$.)

$\det C = 10 - 9 = 1$ ist positiv und der Eintrag oben links ist negativ; also ist die Matrix negativ definit.

$\det D = -1 - 1 = -2$ ist negativ, also ist die Matrix indefinit.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ hat Determinante $32 - 25 = 7$; also ist sie positiv definit. Die quadratische Form zu F ist die Summe von $3x^2$ und der quadratischen Form in y, z zu dieser positiv definiten Matrix, also ist auch F positiv definit.

l) Gegeben seien N Datenpaare (x_i, y_i), die ungefähr proportional zueinander sein sollten. Finden sie das im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate bestmögliche $a \in \mathbb{R}$, so daß $y_i \approx a x_i$ ist!

Lösung: Schreiben wir die Bedingungen $y_i = a x_i$ um zu einem Gleichungssystem für a, hat dieses als Matrix den Spaltenvektor mit Einträgen x_i und als rechte Seite den mit Einträgen y_i. Multiplikation mit dem *Zeilenvektor* $(x_1, \ldots, x_n)$ macht daraus die Gleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right) a = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \,;$$

falls nicht alle x_i verschwinden, ist dies eindeutig lösbar durch

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2} \,.$$

m) Gegeben seien hundert Meßwerte (x_i, t_i), wobei theoretisch ein Zusammenhang der Form

$$x_i = a \sin t_i + b \sin 2t_i + c \sin 3t_i + d \sin 4t_i$$

bestehen sollte. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dessen Lösungen im Sinne der kleinsten Quadrate die beste Schätzung für a, b, c, d liefern!

Lösung: Die gesuchten Größen a, b, c, d sollten theoretisch das lineare Gleichungssystem aus den hundert Gleichungen

$$(\sin t_i) \cdot a + (\sin 2t_i) \cdot b + (\sin 3t_i) \cdot c + (\sin 4t_i) \cdot d = x_i$$

erfüllen. Dessen Matrix A hat vier Spalten, wobei die Einträge der j-ten Spalte gleich den Zahlen $\sin jt_i$ sind. Damit ist ${}^tAA$ eine 4×4-Matrix mit Einträgen

$$a_{k\ell} = \sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin \ell t_i \,.$$

Als rechte Seite des Gleichungssystem haben wir den Vektor

$${}^tA\vec{x} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{100} x_i \sin t_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{100} x_i \sin 4t_i \end{pmatrix} ,$$

das Gleichungssystem besteht also aus den vier Gleichungen

$$\left(\sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin t_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin 2t_i\right) b + \left(\sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin 3t_i\right) c$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{100} \sin kt_i \cdot \sin 4t_i\right) d = \sum_{i=1}^{100} x_i \sin kt_i$$

für $k = 1, \dots, 4$.

n) Wie können Sie vorgehen, wenn ein Zusammenhang der Form $x_i = A\cos(t_i + \varphi)$ zu erwarten ist?

Lösung: Das Problem hier ist, daß die Gleichungen nicht linear in φ sind. Nach der Additionsformel für den Kosinus ist aber

$$\cos(t_i + \varphi) = \cos t_i \cos\varphi - \sin t_i \sin\varphi\,,$$

d.h. $x_i = a\cos t_i + b\sin t_i$ mit $a = A\cos\varphi$ und $b = -A\sin\varphi$.

Dieses Gleichungssystem ist linear in a und b, kann also nach der Methode aus der Vorlesung gelöst werden: Multiplikation mit der Transponierten der Matrix des Gleichungssystems führt auf

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \cos^2 t_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{N} \sin t_i \cos t_i\right) b = \sum_{i=1}^{N} x_i \cos t_i$$

und

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \sin t_i \cos t_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{N} \sin^2 t_i\right) b = \sum_{i=1}^{N} x_i \sin t_i\,.$$

Dieses Gleichungssystem liefert a und b; daraus läßt sich A berechnen als

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und φ durch die beiden Bedingungen

$$\cos\varphi = \frac{a}{A} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = -\frac{b}{A}\,.$$

(Man benötigt beide Bedingungen um φ modulo 2π zu kennen; eine allein liefert nur φ modulo π.)

o) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Datenpaare (k, k^2), $k = 1, \dots, 5$!

Lösung: Da $1+2+3+4+5 = 15$ und $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 1+4+9+16+25 = 55$; der Mittelwert der ersten Komponenten ist also 3, der der zweiten 11. Somit ist die Summe der quadratischen Abweichungen vom Mittelwert

$$(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 10$$

beziehungsweise

$$(1-11)^2 + (4-11)^2 + (9-11)^2 + (16-11)^2 + (25-11)^2 = 10^2 + 7^2 + 2^2 + 5^2 + 14^2 = 374\,.$$

Die Sume der Produkte dieser Abweichungen ist

$$(1-3)(1-11)+(2-3)(4-11)+(3-3)(9-11)+(4-3)(16-11)+(5-3)(25-11) = 20+7+5+28 = 60\,.$$

Demnach ist $\kappa = \dfrac{60}{\sqrt{10 \cdot 374}} \approx 0{,}9811$.

p) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Datenpaare $(\sin^2 k, \cos^2 k)$, $k = 1, \dots, 100$!

Lösung: Da $\cos^2 k = 1 - \sin^2 k$ für alle k, liegen die Datenpaare auf der Geraden $y = 1 - x$. Deren Steigung ist negativ, also ist der Korrelationskoeffizient gleich -1.