

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4.-5. März 2013

a) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

$$\nabla F(f(x), g(y)) = \begin{pmatrix} F_x(f(x), g(y)) \cdot f'(x) \\ F_y(f(x), g(y)) \cdot g'(y) \end{pmatrix} !$$

Lösung: Die Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$ ist differenzierbar mit JACOBI-Matrix $J(x, y) = \begin{pmatrix} f'(x) & 0 \\ 0 & g'(y) \end{pmatrix}$; die JACOBI-Matrix von F ist natürlich

$$J_F(x, y) = (F_x(x, y), F_y(x, y)).$$

Nach der Kettenregel ist die JACOBI-Matrix der zusammengesetzten Funktion

$$J_F(x, y) \cdot J(x, y) = (F_x(f(x), g(y)) \cdot f'(x), F_y(f(x), g(y)) \cdot g'(y)),$$

der Gradient also der zugehörige Spaltenvektor.

b) Was ist $\nabla F(f(x) + g(y), f(x) - g(y))$?

Lösung: Hier müssen wir entsprechend die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$(x, y) \mapsto (f(x) + g(y), f(x) - g(y))$$

betrachten; ihre JACOBI-Matrix ist $J(x, y) = \begin{pmatrix} f'(x) & g'(y) \\ f'(x) & -g'(y) \end{pmatrix}$. Somit ist

$$J_F(x, y) \cdot J(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) \cdot f'(x) + F_y(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) \cdot f'(x), \\ F_x(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) \cdot g'(y) - F_y(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) \cdot g'(y) \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} & \nabla F(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) \\ &= \begin{pmatrix} F_x(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) \cdot f'(x) + F_y(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) \cdot f'(x) \\ F_x(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) \cdot g'(y) - F_y(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) \cdot g'(y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^5}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ stetig? differenzierbar? stetig differenzierbar?

Lösung: Natürlich ist die Funktion in allen Punkten ungleich $(0, 0)$ stetig, denn dort ist sie einfach ein Quotient zweier Polynome, und der Nenner verschwindet nicht. Zum Nachweis der Stetigkeit im Nullpunkt müssen wegen $f(0, 0) = 0$ zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|f(x, y)| < \varepsilon$ ist, falls $|x|$ und $|y|$ kleiner δ sind. Für $x = 0$ ist $f(0, y) = 0$ für alle y ; diese Punkte sind also problemlos.

Für $y \neq 0$ ist

$$|f(x, y)| = \left| \frac{(xy)^5}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^3 y^5}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right| \leq |x^3 y^5|.$$

Setzen wir $\delta = \sqrt[8]{\varepsilon}$, ist dies kleiner $\delta^8 = \varepsilon$, wenn sowohl $|x| < \delta$ als auch $|y| < \delta$ ist.

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist

$$f_x(x, y) = \frac{5(x^2 + y^2)x^4y^5 - 2x^6y^5}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^6y^5 + 5x^4y^7}{(x^2 + y^2)^2};$$

für $(x, y) = (0, 0)$ ist

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Völlig analog zum Beweis der Stetigkeit kann man zeigen, daß auch

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_x(x, y) = 0$$

ist, und fast wörtlich das gleiche Argument zeigt auch, daß

$$f_y(0, 0) = 0 = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_y(x, y)$$

ist. Somit ist f stetig differenzierbar mit

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{3x^6y^5 + 5x^4y^7}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{5x^7y^4 + 3x^5y^6}{(x^2 + y^2)^2} \right) \quad \text{falls } (x, y) \neq (0, 0)$$

und $\nabla f(0, 0)$ ist der Nullvektor.

d) In welchen Punkten läßt sich die Gleichung $x + \sin xy = y + \cos(x + y)$ nach y auflösen?

Lösung: Nach dem Satz über implizite Funktionen geht das in allen Punkten, in denen $x_0 + \sin x_0 y_0 = y_0 + \cos(x_0 + y_0)$ ist und außerdem die partielle Ableitung nach y der Differenz beider Seiten nicht verschwindet, d.h. $x_0 \cos x_0 y_0 \neq 1 - \sin(x_0 + y_0)$.

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion. Wann läßt sich die Gleichung $y = f(x)$ in einer Umgebung des Punkts (x_0, y_0) nach x auflösen? Welche Ableitung hat die dabei erhaltene Funktion $x = g(y)$ in y_0 ?

Lösung: Die Gleichung $F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - y$ läßt sich in (x_0, y_0) nach x auflösen, wenn $F(x_0, y_0) = 0$ ist, d.h. $y_0 = f(x_0)$, und wenn $F_x(x_0, y_0) = f'(x_0)$ nicht verschwindet.

f) Finden Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy - 36$!

Lösung: In jedem lokalen Extremum verschwindet der Gradient von f , also verschwinden

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 9y \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = 3y^2 + 9x.$$

In solchen Punkten ist also $x^2 = -3y$ und $y^2 = -3x$. Somit ist in jedem dieser Punkte $x^4 = 9y^2 = -27x$, d.h. $x^4 + 27x = x(x^3 + 27)$ verschwindet. Das passiert für $x = 0$ und $x = -3$; wir müssen also diese beiden Fälle untersuchen.

Ist $x = 0$, so verschwindet auch y ; wir befinden uns also im Nullpunkt. Da $f(x, 0) = x^3 - 36$ nahe null sowohl größere als auch kleinere Werte als $f(0, 0) = -36$ annimmt, haben wir hier weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum.

Für $x = -3$ ist auch $y = -3$ und

$$f(-3 + h, -3 + k) = -9 - 9(h^2 - hk + k^2) + h^3 + k^3 = -9 - 9(h^2 - hk + k^2) + o(\max(h, k)).$$

Da

$$h^2 - hk + k^2 = \left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 \geq 0$$

für alle (h, k) , hat f in $(-3, -3)$ ein lokales Maximum.

g) Am Ufer eines sehr langen und geraden Flusses soll ein rechteckförmiges Grundstück eingezäunt werden. Wie groß kann das Grundstück höchstens sein, wenn dazu hundert Meter Zaun zur Verfügung stehen und zur Flußseite hin nicht eingezäunt wird?

Lösung: Der Zaun parallel zum Fluß habe in Metern ausgedrückt die Länge y und befinde sich im Abstand x vom Fluß. Dann ist die Länge des Zauns $y + 2x = 100$, und die umzäunte Fläche ist $xy = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$. Die Ableitung dieser Funktion nach x ist $100 - 4x$, das Maximum wird also erreicht bei $x = 25$ und $y = 50$. Die umzäunte Fläche ist $25 \times 50 = 1250$ Quadratmeter.

h) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x, y) = xy$ auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$!

Lösung: In diesen Punkten müssen die Gradienten von f und $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, also $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ und $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ linear abhängig sein, d.h. $2y^2 = 2x^2$ oder $y = \pm x$. Da die Punkte auf der Kreislinie liegen müssen, ist dann $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$, also $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Falls beide das gleiche Vorzeichen haben, ist $f(x, y) = \frac{1}{2}$, bei verschiedenen Vorzeichen ist $f(x, y) = -\frac{1}{2}$. Somit haben wir Maxima in den Punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, Minima bei $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

i) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x, y, z) = xyz$ auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$!

Lösung: Die Gradienten von f und $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ sind

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Der Gradient von g verschwindet nur im Nullpunkt, der nicht auf der Kugeloberfläche liegt; daher sind die beiden Gradienten genau dann linear abhängig, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$, d.h.

$$yz = \lambda x, \quad xz = \lambda y \quad \text{und} \quad xy = \lambda z.$$

Da f verschwindet, wenn eine der Variablen null ist, sind in den Extrema alle Variablen ungleich null; wir können also nach λ auflösen und erhalten

$$\lambda = \frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z} \quad \text{oder} \quad y^2 z^2 = x^2 z^2 = x^2 y^2.$$

Da keine der Variablen verschwindet, folgt daraus, daß $x^2 = y^2 = z^2$ ist; in den Extrema haben also alle Variablen denselben Betrag. Da die Punkte auf der Kugeloberfläche liegen, ist dieser Betrag $\frac{1}{\sqrt{3}}$; wir bekommen die acht Punkte

$$\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

Falls zwei oder kein Minuszeichen auftreten, ist der Funktionswert positiv, wir haben also Maxima, sonst Minima.

j) Bestimmen Sie den Maximalwert der Funktion $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 1$!

Lösung: Falls das Maximum im Innern der Kreisscheibe angenommen wird, verschwindet dort der Gradient von f , d.h. $2 \cos x \sin x = 0$ und $2 \cos y \sin y = 0$. Somit muß $x = \frac{1}{2}k\pi$ und $y = \frac{1}{2}\ell\pi$ für $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Da $x^2 + y^2 < 1$ sein soll und $\frac{1}{2}\pi > 1$ ist, kommen nur $k = \ell = 0$ in Frage, also $x = y = 0$, und $f(0, 0) = 2$ ist offensichtlich der größte Wert den f annehmen kann.

k) Bestimmen Sie alle Punkte in der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 3/2$, in denen die Funktion $f(x, y) = \sin^2(x + y) + \cos^2(x - y)$ ihr absolutes Maximum annimmt!

Lösung:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \sin(x + y) \cos(x + y) - 2 \cos(x - y) \sin(x - y) \\ 2 \sin(x + y) \cos(x + y) + 2 \cos(x - y) \sin(x - y) \end{pmatrix}$$

verschwindet genau dann, wenn $\sin(x+y)\cos(x+y) = \sin(x-y)\cos(x-y) = 0$ ist, d.h. $x \pm y$ müssen Vielfache von $\frac{1}{2}\pi$ sein und damit x und y Vielfache von $\frac{1}{4}\pi$. Für Punkte im Einheitskreis kommen nur 0 und $\pm\frac{1}{4}\pi$ in Frage. Falls eine der beiden Koordinaten verschwindet, nimmt $f(x, y)$ den Wert eins an, haben beide Betrag $\pm\frac{1}{4}\pi$ und sind gleich, erhalten wir den offensichtlich nicht überbietbaren Wert zwei, und bei verschiedenem Vorzeichen schließlich den Wert null. Das absolute Maximum wird also in den beiden Punkten $\pm(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ angenommen und der Funktionswert in diesen Punkten ist zwei.

- l) Gibt es auch Punkte auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 3/2$, in denen dieser Wert angenommen wird?

Lösung: Nein, denn ist $f(x, y) = 2$, so muß $\cos(x-y) = \pm 1$ sein, x und y müssen sich also um ein ganzzahliges Vielfaches von π unterscheiden. Dies ist im Kreis mit Radius $\sqrt{3/2}$ nur möglich für $x = y$; dann ist $f(x, x) = \sin^2(2x) + 1$. Damit dies gleich zwei ist, müßte $2x$ ein halbzahliges Vielfaches von $\pi/4$ sein, aber für solche Punkte ist $2x^2 \neq 3/2$.

- m) Beschreiben Sie die Menge $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$ geometrisch!

Lösung: Das ist eine Ellipse mit Halbachsen zwei und drei.

- n) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ in M !

Lösung: $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y-2 \end{pmatrix}$ verschwindet im Punkt $(0, 1)$; dort ist $f(0, 1) = -1$. Da $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2 - 1 \geq -1$ ist, liegt hier das absolute Minimum.

Nun betrachten wir den Rand der Ellipse. Der Gradient von $g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$ ist $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{2}{9}y \end{pmatrix}$; da er auf dem Rand der Ellipse nirgends verschwindet, muß es in einem Extremum ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, so daß

$$2x = \lambda \frac{x}{2} \quad \text{und} \quad 2y - 2 = \lambda \cdot \frac{2y}{9}.$$

Wenn wir alle mit x bzw. y behafteten Terme auf eine Seite bringen, werden diese Gleichung zu

$$(4 - \lambda)x = 0 \quad \text{und} \quad (9 - \lambda)y = 9.$$

Für $x = 0$ gilt die erste Gleichung für alle λ . In diesem Fall ist $y = \pm 3$; die zweite Gleichung wird also zu $(9 - \lambda) \cdot (\pm 3) = 9$, was natürlich lösbar ist. Die zugehörigen Funktionswerte sind $f(0, 3) = 3$ und $f(0, -3) = 15$.

Ist $x \neq 0$, muß $\lambda = 4$ sein; die zweite Gleichung wird dann zu $5y = 9$, d.h. $y = 9/5$ und damit $x = \pm 8/5$. Der Funktionswert ist in beiden Fällen $11/5$.

Da f stetig ist, muß f auf dem Ellipsenbogen sowohl sein Maximum als auch sein Minimum annehmen; damit ist klar, daß in $(0, \pm 3)$ Maxima und in $(\pm 8/5, 9/5)$ Minima liegen.

- o) Ein Quader mit achsenparallelen Kanten liege ganz in der Menge

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Wie groß kann sein Volumen höchstens sein?

Lösung: Offensichtlich müssen die Ecken des Quaders auf dem Rand liegen; sonst könnte man ihn leicht vergrößern. Dann haben sie Koordinaten $(\pm x, \pm y, \pm z)$, die die Ellipsoidgleichung erfüllen, und das Volumen des Quaders ist $f(x, y, z) = 8xyz$. Wir müssen also diese Funktion maximieren unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Selbstverständlich verschwindet im Maximum keine der Koordinaten; sonst wäre das Volumen null.

Damit verschwindet auch keiner der Gradienten

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 8yz \\ 8xz \\ 8xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix};$$

für das Maximum gibt es also ein $\lambda \neq 0$, so daß

$$8yz = \frac{2\lambda x}{a^2}, \quad 8xz = \frac{2\lambda y}{b^2} \quad \text{und} \quad 8xy = \frac{2\lambda z}{c^2}.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit x , die zweite mit y und die dritte mit z erhalten wir die Gleichungen

$$8xyz = 2\lambda \frac{x^2}{a^2} = 2\lambda \frac{y^2}{b^2} = 2\lambda \frac{z^2}{c^2},$$

die wir noch durch 2λ dividieren können; auf Grund der Ellipsoidgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

folgt, daß

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$

sein muß. Somit ist

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}b, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{3}c \quad \text{und} \quad 8xyz = \frac{8\sqrt{3}}{9}abc.$$

- p) Ein Produkt werde aus drei Ressourcen hergestellt, die jeweils 80 Euro, 12 Euro bzw. 10 Euro kosten. Aus x Einheiten der ersten, y der zweiten und z der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten lassen sich für maximal 24 000 Euro fertigen?

Lösung: Offensichtlich sind nur positive Werte von x, y, z sinnvoll. Sowohl $f(x, y, z) = 50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ als auch $g(x) = 80x + 12y + 10z$ sind, wenn man zwei Variablen festhält, monoton wachsend in der dritten; daher ist im Optimum $g(x, y, z) = 24\,000$.

Die Gradienten von f und $g - 24\,000$ sind

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 80 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix};$$

da beide nicht verschwinden, muß es im Maximum ein λ geben mit

$$\begin{aligned} 20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} &= 80\lambda \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} &= 10\lambda. \end{aligned}$$

oder, gekürzt auf rechte Seiten 12λ ,

$$\begin{aligned} 3x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 12x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} &= 12\lambda. \end{aligned}$$

Somit ist $3x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} = 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} = 12x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5}$. Multiplikation mit $x^{3/5}y^{4/5}z^{4/5}$ macht daraus die Gleichung

$$3yz = 10xz = 12xy, \quad \text{d.h.} \quad 3y = 10x, \quad 10z = 12y \quad \text{und} \quad 3z = 12x.$$

Drücken wir alle drei Variablen durch x aus, ist also $z = 4x$ und $y = 10x/3$, also

$$g(x, y, z) = 80x + 40x + 40x = 160x,$$

was für $x = 150$ gleich 24 000 wird. Im Maximum ist also

$$x = 150, \quad y = 500 \quad \text{und} \quad z = 600.$$

Mit diesen Werten ist

$$f(x, y, z) = 50 \cdot 150^{2/5} \cdot 500^{1/5} \cdot 600^{1/5} = 50 \cdot \sqrt[5]{150^2 \cdot 500 \cdot 600} \approx 4622,0087.$$

Somit lassen sich maximal 4622 Einheiten herstellen.

- q) Ab welchem Preis, der für eine produzierte Einheit erzielt werden kann, lohnt sich eine Erhöhung des Kapitaleinsatzes?

Lösung: Dazu müssen wir λ berechnen, z.B. aus der Gleichung

$$12\lambda = 3x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{5}} = 3 \cdot 150^{-\frac{3}{5}} \cdot 500^{\frac{1}{5}} \cdot 600^{\frac{1}{5}} \approx 1,8488,$$

d.h. $\lambda \approx 0,154$. Bei einem um h erhöhten Kapitaleinsatz lassen sich etwa λh zusätzliche Einheiten fertigen; das lohnt sich, sobald der erzielbare Preis höher ist als $1/\lambda \approx 6,49$ Euro.