Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4.-5. März 2013

a) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:
$$\nabla F\bigl(f(x), g(y)\bigr) = \begin{pmatrix} F_x\bigl(f(x), g(y)\bigr) \cdot f'(x) \\ F_y\bigl(f(x), g(y)\bigr) \cdot g'(y) \end{pmatrix} \;!$$

b) Was ist $\nabla F\bigl(f(x)+g(y), f(x)-g(y)\bigr)$?

c) Ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^5}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ stetig? differenzierbar? stetig differenzierbar?

d) In welchen Punkten läßt sich die Gleichung $x + \sin xy = y + \cos(x+y)$ nach y auflösen?

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion. Wann läßt sich die die Gleichung $y = f(x)$ in einer Umgebung des Punkts (x_0, y_0) nach x auflösen? Welche Ableitung hat die dabei erhaltene Funktion $x = g(y)$ in y_0 ?

f) Finden Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 + 9xy - 36$!

g) Am Ufer eines sehr langen und geraden Flusses soll ein rechteckförmiges Grundstück eingezäunt werden. Wie groß kann das Grundstück höchstens sein, wenn dazu hundert Meter Zaun zur Verfügung stehen und zur Flußseite hin nicht eingezäunt wird?

h) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y) = xy$ auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$!

i) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y,z) = xyz$ auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$!

j) Bestimmen Sie den Maximalwert der Funktion $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 1$!

k) Bestimmen Sie alle Punkte in der offenen Kreisscheibe $x^2+y^2 < 3/2$, in denen die Funktion $f(x,y) = \sin^2(x+y) + \cos^2(x-y)$ ihr absolutes Maximum annimmt!

l) Gibt es auch Punkte auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 3/2$, in denen dieser Wert angenommen wird?

m) Beschreiben Sie die Menge $M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$ geometrisch!

n) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ in M !

o) Ein Quader mit achsenparallelen Kanten liege ganz in der Menge
$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$
Wie groß kann sein Volumen höchstens sein?

p) Ein Produkt werde aus drei Ressourcen hergestellt, die jeweils 80 Euro, 12 Euro *bzw.* 10 Euro kosten. Aus x Einheiten der ersten, y der zweiten und z der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten lassen sich für maximal 24 000 Euro fertigen?

q) Ab welchen Preis, der für eine produzierte Einheit erzielt werden kann, lohnt sich eine Erhöhung des Kapitaleinsatzes?