WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 25.-26. Februar 2013

a) Zeigen Sie direkt (d.h. nur unter Verwendung der Stetigkeitsdefinition), daß die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x$ stetig ist!

Lösung: Wir müssen zeigen, daß f in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ stetig ist. Dort ist $f(x_0, y_0) = x_0$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gilt für die Maximumsnorm (oder auch die EUKLIDische Norm) auf $\mathbb{R}^2$: Ist $\|(u,v) - (x_0, y_0)\| < \varepsilon$, so ist insbesondere $|u - x_0| < \varepsilon$; die Bedingung aus der Stetigkeitsdefinition ist also erfüllt für $\delta = \varepsilon$.

b) Richtig oder falsch: $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungspunkt der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in D$ gibt, die gegen x konvergiert.

Lösung: *Falsch:* Sei etwa D die einelementige Menge, die nur aus dem Nullpunkt besteht. Dann ist der Nullpunkt natürlich kein Häufungspunkt von D, aber die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = (0, \dots, 0)$ für alle k konvergiert gegen den Nullpunkt.

c) Richtig oder falsch: $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungspunkt der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Punkten $x_k \in D$ gibt, die gegen x konvergiert.

Lösung: *Richtig:* Falls es eine solche Folge gibt, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|x - x_k\| < \varepsilon$ für alle $k \geq N_0$. Da alle x_k in D liegen und paarweise verschieden sind, liegen die unendlich vielen x_k mit $k \geq N_0$ allesamt in D und $\|x - x_k\| < \varepsilon$.

Ist umgekehrt x ein Häufungspunkt von D, so gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in D$ mit $x_k \neq x$ und $\|x - x_k\| < 1/k$. (Es gibt sogar unendlich viele.) Selbstverständlich konvergiert diese Folge gegen x; die x_k müssen allerdings nicht paarweise verschieden sein.

Unter den x_k muß es aber unendlich viele verschiedene Punkte geben, denn sonst gäbe es nur endlich viele Abstände $\|x - x_k\|$ und damit insbesondere einen minimalen. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß $\|x - x_k\| < 1/k$ ist.

Streichen wir aus der Folge der x_k alle Punkte, die bereits an einer früheren Stelle vorkamen, erhalten wir eine neue Folge aus paarweise verschiedenen Punkten, und auch die konvergiert gegen x.

d) Zeigen Sie: Für $h \to 0$ ist $\cos h - 1 = o(h)$!

Lösung: Nach der Regel von DE L'HÔPITAL und wegen der Stetigkeit der Sinusfunktion ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{1} = -\sin 0 = 0\,.$$

e) Richtig oder falsch: Für ein Polynom $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens n ist $f(x) = o(x^{n+1})$ für $x \to 0$.

Lösung: *Falsch:* Ist f nicht das Nullpolynom, sondern $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit mindestens einem $a_i \neq 0$, so wächst der Betrag von

$$\frac{f}{x^{n+1}} = \frac{a_n}{x} + \frac{a_{n-1}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^n} + \frac{a_0}{x^{n+1}}$$

für $x \to 0$ über alle Grenzen, geht also ganz sicher nicht gegen 0.

f) Richtig oder falsch: Für ein Polynom $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vom Grad höchstens n ist $f(x)=o(x^{n+1})$ für $x\to\infty$.

Lösung: *Richtig:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f}{x^{n+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{x}+\frac{a_{n-1}}{x^2}+\cdots+\frac{a_1}{x^n}+\frac{a_0}{x^{n+1}}=0\,.$$

g) Richtig oder falsch: $\log x=o(x)$ für $x\to 0$.

Lösung: *Falsch,* denn $\lim\limits_{x\searrow 0}\log x=-\infty$, nicht Null.

h) Richtig oder falsch: $\log x=o(x)$ für $x\to\infty$.

Lösung: *Richtig:* Nach der Regel von DE L'HÔPITAL ist

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

i) Richtig oder falsch: Ist $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig, so auch $\sqrt{f}$.

Lösung: *Richtig:* Wir wissen aus der Analysis I, daß die Funktion $\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$, die jeder nichtnegativen Zahl deren Quadratwurzel zuordnet, stetig, und die Hintereinanderausführung stetiger Funktionen ist stetig.

j) Richtig oder falsch: Ist $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ differenzierbar, so auch $\sqrt{f}$.

Lösung: *Falsch:* Ist etwa $f(x,y)=x^2$, so ist $\sqrt{f(x)}=|x|$, und diese Funktion ist für $x=0$ nicht differenzierrbar.

k) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ mit $f(x)=(x,x^2,\sin x)$!

Lösung: Die Zeilen der JACOBI-Matrix sind die Ableitungen der drei Komponentenfunktionen, d.h.

$$J_f(x)=\begin{pmatrix}1\\2x\\\cos x\end{pmatrix}.$$

l) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$:
$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\quad g(x,y,z)=xyz,\quad h(x,y,z)=e^{f(x,y,z)},\quad k(x,y,z)=\cos g(x,y,z)$!

Lösung: Wir berechnen zunächst die partiellen Ableitungen:

$$\begin{array}{ccc}
f_x(x,y,z)=2x, & f_y(x,y,z)=2y, & f_z(x,y,z)=2z\\
g_x(x,y,z)=yz, & g_y(x,y,z)=xz, & g_z(x,y,z)=xy\\
h_x(x,y,z)=2xe^{x^2+y^2+z^2}, & h_y(x,y,z)=2ye^{x^2+y^2+z^2}, & h_z(x,y,z)=2ze^{x^2+y^2+z^2},\\
k_x(x,y,z)=-yz\sin(xyz), & k_x(x,y,z)=-xz\sin(xyz), & k_x(x,y,z)=-xy\sin(xyz)
\end{array}$$

Somit ist

$$\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix},\qquad \nabla g(x,y,z)=\begin{pmatrix}yz\\xz\\xy\end{pmatrix},$$

$$\nabla h(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}\nabla f(x,y,z)\quad\text{und}\quad \nabla k(x,y,z)=-\sin(xyz)\nabla g(x,y,z).$$

m) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \big(\cos(2x+3y^2),\ \sin(4x^2+5y)\big) \end{cases}$$

Lösung: Die erste Komponente $\cos(2x+3y^2)$ hat $-2\sin(2x+3y^2)$ als partielle Ableitung nach x und $-6y\sin(2x+3y^2)$ als partielle Ableitung nach y; für die zweite Komponente erhalten wir entsprechend $8x\cos(4x^2+5y)$ und $5\cos(4x^2+5y)$. Somit ist

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\sin(2x+3y^2) & -6y\sin(2x+3y^2) \\ 8x\cos(4x^2+5y) & 5\cos(4x^2+5y) \end{pmatrix}.$$

n) Bestimmen Sie die JACOBI-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto (y_1,\dots,y_m) \quad \text{mit} \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_j \end{cases}$$

im Punkt $(x_1,\dots,x_n)$!

Lösung: Die partielle Ableitung von $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_j$ nach x_k ist a_{ik}, also ist

$$J_f(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

o) Auf welcher (größtmöglichen) Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist die Funktion

$$f(x,y) = \left(\sin\frac{x^2+y^2}{x}, \cos\frac{x^4-y^4}{y}\right)$$

definiert? Ist D offen?

Lösung: Die einzigen Probleme sind die Nenner; sobald x oder y verschwindet, ist $f(x,y)$ nicht definiert. Somit ist

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy \neq 0\right\},$$

und von dieser Menge haben wir bereits letzte Woche gesehen, daß sie offen ist.

p) Zeigen Sie durch schrittweise Anwendung der Lemmata der Vorlesung, daß f auf ganz D stetig ist!

Lösung: Wir wissen aus der Analysis I, daß die Funktionen $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^4$, $y \mapsto y^2$ und $y \mapsto y^4$ stetig sind. Da, wie wir in der ersten Aufgabe auf diesem Blatt gesehen haben, auch die Projektion $(x,y) \mapsto x$ stetig ist und entsprechend natürlich auch $(x,y) \mapsto y$, sind somit auch die Abbildungen

$$(x,y) \mapsto x^2, \quad (x,y) \mapsto y^2, \quad (x,y) \mapsto x^4 \quad \text{und} \quad (x,y) \mapsto y^4$$

stetig als Hintereinanderausführungen. Schachtelung mit der Addition *bwz.* Subtraktion zeigt die Stetigkeit von

$$(x,y) \mapsto x^2+y^2 \quad \text{und} \quad (x,y) \mapsto x^4-y^4.$$

Da für $(x,y) \in D$ weder x noch y verschwindet und die Division durch Nenner ungleich Null stetig ist, sind auf D auch die Funktionen

$$(x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{x} \quad \text{und} \quad (x,y) \mapsto \frac{x^4-y^4}{y}$$

stetig, und damit auch ihre Schachtelungen mit Sinus und Kosinus, d.h. die Funktionen

$$(x,y) \mapsto \sin\frac{x^2+y^2}{x} \quad \text{und} \quad (x,y) \mapsto \cos\frac{x^4-y^4}{y}\,.$$

Da eine Funktion nach $\mathbb{R}^2$ genau dann stetig ist, wenn ihre Komponenten stetig sind, folgt die Stetigkeit von f auf D.

q) In welchen Punkten von D ist f differenzierbar? Bestimmen Sie dort jeweils die JACOBI-Matrix von f!

Lösung: Auch hierkönnen wir die beiden Komponenten einzeln betrachten und ihre partiellen Ableitungen berechnen; wir beachten dabei, daß

$$\frac{x^2+y^2}{x} = x + \frac{y^2}{x} \quad \text{und} \quad \frac{x^4-y^4}{y} = \frac{x^4}{y} - y^3$$

ist. Daher ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\sin\frac{x^2+y^2}{x} &= \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)\cos\frac{x^2+y^2}{x} = \frac{x^2-y^2}{x^2}\cos\frac{x^2+y^2}{x}\\
\frac{\partial}{\partial y}\sin\frac{x^2+y^2}{x} &= \frac{2y}{x}\cos\frac{x^2+y^2}{x}\\
\frac{\partial}{\partial x}\cos\frac{x^4-y^4}{y} &= -\frac{4x^3}{y}\sin\frac{x^4-y^4}{y}\\
\frac{\partial}{\partial y}\cos\frac{x^4-y^4}{y} &= -\left(-\frac{x^4}{y^2}-3y^2\right)\sin\frac{x^4-y^4}{y} = \frac{x^4+3y^4}{y^2}\sin\frac{x^4-y^4}{y}
\end{aligned}$$

und

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x^2-y^2}{x^2}\cos\dfrac{x^2+y^2}{x} & \dfrac{2y}{x}\cos\dfrac{x^2+y^2}{x} \\ -\dfrac{4x^3}{y}\sin\dfrac{x^4-y^4}{y} & \dfrac{x^4+3y^4}{y^2}\sin\dfrac{x^4-y^4}{y} \end{pmatrix}.$$

r) Existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Lösung: *Nein,* denn weder für

$$\frac{x^2+y^2}{x} = x + \frac{y^2}{x} \quad \text{noch für} \quad \frac{x^4-y^4}{y} = \frac{x^4}{y} - y^3$$

existiert ein entsprechender Limes: Beispielsweise erhalten wir auf der Parabel $y^2 = ax$ für den ersten Ausdruck den Wert $x + a$, der gegen a geht, und für den zweiten auf der Kurve $y = cx^4$ den Wert $c - y^3$, der gegen c geht.