Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 25.-26. Februar 2013

a) Zeigen Sie direkt (d.h. nur unter Verwendung der Stetigkeitsdefinition), daß die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x$ stetig ist!

b) *Richtig oder falsch:* $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungspunkt der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in D$ gibt, die gegen x konvergiert.

c) *Richtig oder falsch:* $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungspunkt der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Punkten $x_k \in D$ gibt, die gegen x konvergiert.

d) Zeigen Sie: Für $h \to 0$ ist $\cos h - 1 = o(h)$!

e) *Richtig oder falsch:* Für ein Polynom $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens n ist $f(x) = o(x^{n+1})$ für $x \to 0$.

f) *Richtig oder falsch:* Für ein Polynom $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens n ist $f(x) = o(x^{n+1})$ für $x \to \infty$.

g) *Richtig oder falsch:* $\log x = o(x)$ für $x \to 0$.

h) *Richtig oder falsch:* $\log x = o(x)$ für $x \to \infty$.

i) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig, so auch $\sqrt{f}$.

j) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ differenzierbar, so auch $\sqrt{f}$.

k) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = (x, x^2, \sin x)$!

l) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$:

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2,\quad g(x,y,z) = xyz,\quad h(x,y,z) = e^{f(x,y,z)},\quad k(x,y,z) = \cos g(x,y,z)$!

m) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \bigl(\cos(2x+3y^2),\ \sin(4x^2+5y)\bigr) \end{cases}$$

n) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto (y_1,\dots,y_m) \quad \text{mit} \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_j \end{cases}$$

im Punkt $(x_1,\dots,x_n)$!

o) Auf welcher (größtmöglichen) Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist die Funktion

$$f(x,y) = \left(\sin\frac{x^2+y^2}{x}, \cos\frac{x^4-y^4}{y}\right)$$

definiert? Ist D offen?

p) Zeigen Sie durch schrittweise Anwendung der Lemmata der Vorlesung, daß f auf ganz D stetig ist!

q) In welchen Punkten von D ist f differenzierbar? Bestimmen Sie dort jeweils die Jacobi-Matrix von f !

r) Existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?