Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18–19. Februar 2013

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int \sin^2 x\,dx, \qquad \int e^x \cos 3x\,dx, \qquad \int xe^{-x^2}\,dx, \qquad \int x^3 e^{-x^2}\,dx, \qquad \int x \log x\,dx$$

Lösung: Wir verwenden hier jeweils die Regel zur partiellen Integration:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx\,.$$

Mit $u(x) = \sin x$ und $v(x) = -\cos x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx \\ &= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x\,dx\,,\end{aligned}$$

also ist

$$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + x \quad \text{und} \quad \int \sin^2 x = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C\,.$$

Mit $u(x) = \cos 3x$ und $v(x) = e^x$ erhalten wir

$$\int e^x \cos 3x\,dx = e^x \cos 3x + 3\int e^x \sin 3x\,dx\,;$$

wenden wir die Regel noch einmal an mit $u(x) = \sin 3x$ folgt

$$\int e^x \sin 3x = e^x \sin 3x - 3\int e^x \cos 3x\,dx\,;$$

daher ist

$$\int e^x \cos 3x\,dx = e^x(\cos 3x + 3\sin 3x) - 9\int e^x \cos 3x\,dx$$

und

$$\int e^x \cos 3x\,dx = \frac{e^x(\cos 3x + 3\sin 3x)}{10} + C\,.$$

Da e^{-x^2} die Ableitung $-2xe^{-x^2}$ hat, ist (ganz ohne partielle Integration)

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C\,.$$

Dies können wir für das letzte Integral verwenden: Da wir keine Stammfunktion von e^{-x^2} kennen, wohl aber eine von $x \cdot e^{-x^2}$, setzen wir $u(x) = x^2$ und $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$; wir erhalten

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{(x^2+1)e^{-x^2}}{2} + C\,.$$

Mit $u(x) = \log x$ und $v(x) = \frac{1}{2}x^2$ schließlich ist

$$\int x\log x\,dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C\,.$$

Wie in der Vorlesung bei der Berechnung von $\int \log x\,dx$ müssen wir also auch hier den Vorfaktor als Ableitung betrachten, damit im zweiten Integral der Logarithmus durch seine Ableitung $1/x$ ersetzt wird und wir so zu einem leicht auswertbaren Integral kommen.

b) Berechnen Sie mittels der Substitution $x = \log u$ das Integral $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}$!

Lösung: Ist $x = \log u$, so ist $dx = \frac{du}{u}$; außerdem ist $0 = \log 1$ und $1 = \log e$. Somit ist

$$\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int\limits_1^e \frac{u^2}{u+1}\,\frac{du}{u} = \int\limits_1^e \frac{u}{u+1}\,du = \int\limits_1^e \left(1 - \frac{1}{u+1}\right)\,du = u - \ln|u+1|\,\bigg|_1^e$$
$$= e - 1 - \log(e+1) + \log 2\,.$$

c) Bestimmen Sie mittels der Substitution $x = \sin u$ eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$!

Lösung: Für $x = \sin u$ ist $dx = \cos u\,du$, also

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,du = \int \cos^2 u\,du = \int (1-\sin^2 u)\,du$$
$$= u - \frac{u - \sin u \cos u}{2} + C = \frac{u + \sin u \cos u}{2} + C = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + C\,.$$

(Die Stammfunktion von $\sin^2 u$ wurde aus *a)* übernommen.)

d) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x,y) = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$ geometrisch!

Lösung: Er besteht aus allen Punkten $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $z - 5 = -\sqrt{x^2+y^2}$, d.h. allen Punkten mit $z \le 5$, für die $(z-5)^2 = x^2+y^2$ ist. Auf der Höhe $5-z$ haben wir also in der Ebene parallel zur xy-Ebene einen Kreis mit Radius $5-z$. Somit ist der Graph der Mantel eines Kegels mit Spitze in $(0,0,5)$, der sich nach unten öffnet; der Winkel zwischen Kegelachse und -mantel beträgt $45°$.

e) *Richtig oder falsch:* Der Graph einer Funktion $f(x,y)$ ist genau dann eine Ebene, wenn es $a,b,c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $f(x,y) = ax+by+c$.

Lösung: Der Graph von $ax+by+c$ besteht aus allen $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $z = ax+by+c$ oder $ax+by-z = -c$; dies ist eine Ebene.

Ist umgekehrt der Graph eine Ebene mit Gleichung $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$, so muß, da es sich um den Graphen einer Funktion $z = f(x,y)$ handelt, $\gamma \ne 0$ sein, und

$$z = f(x,y) = -\frac{\alpha}{\gamma}x - \frac{\beta}{\gamma}y + \frac{\delta}{\gamma}\,,$$

also ist die Behauptung richtig.

f) Welche Koordinatenachsen des $\mathbb{R}^3$ kann der Graph einer Funktion $f(x,y)$ enthalten?

Lösung: Ganz bestimmt nicht die z-Achse, denn von der liegt nur der Punkt $\big(0,0,f(0,0)\big)$ im Graphen. x- und y-Achse dagegen können im Graphen liegen, nämlich dann, wenn die Funktion f durch x *bzw.* y teilbar ist, d.h. als Produkt einer Funktion $g(x,y)$ mit x oder y geschrieben werden kann.

g) Beschreiben Sie die Niveaumengen $N_a(f)$ von $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ in Abhängigkeit von a, und vergleichen Sie mit den Niveaumengen $N_g(a)$ von $g(x,y) = x^2+y^2$!

Lösung: Für $a < 0$ ist $N_a(f) = N_a(g) = \emptyset$, für $a = 0$ bestehen beide nur aus dem Nullpunkt, und für $a > 0$ ist $N_a(f) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2+y^2 = a^2\big\}$ ein Kreis mit Radius a und $N_a(g) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2+y^2 = a\big\}$ ein Kreis mit Radius $\sqrt{a}$ um den Nullpunkt. Beide Funktionen haben also die gleichen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ als Niveaumengen, allerdings gehören sie (außer für $a = 0$ und $a = 1$) zu verschiedenen Niveaus.

h) Was können Sie über eine Funktion sagen, deren Niveaumengen abgesehen von der einelementigen Menge $\{(0,0)\}$ allesamt Kreise um den Nullpunkt von $\mathbb{R}^2$ sind?

Lösung: Es muß eine injektive Funktion $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ geben, so daß $f(x,y) = g(x^2+y^2)$ ist.

i) Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf $\mathbb{R}^2$?

$$\|(x,y)\|_1 = x^2+y^2, \qquad \|(x,y)\|_2 = |x+y|\,, \qquad \|(x,y)\|_3 = |x|+|y|$$
$$\|(x,y)\|_4 = \max(x,y), \qquad \|(x,y)\|_5 = \max(2\,|x|\,,|3y|), \qquad \|(x,y)\|_6 = \sqrt{|xy|}$$

Lösung: $\|(x,y)\|_1 = x^2+y^2$ definiert keine Norm, denn für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\|\lambda(x,y)\|_1 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_1 = \lambda^2(x^2+y^2) = \lambda^2(x^2+y^2) = \lambda^2\,\|(x,y)\|_1\ ,$$

was für $\lambda \neq 0,1$ nicht mit $|\lambda|\,\|(x,y)\|_1$ übereinstimmt.

Auch $\|(x,y)\|_2 = |x+y|$ definiert keine Norm, denn beispielsweise ist $\|(1,-1)\|_2 = 0$, obwohl $(1,-1)$ nicht der Nullpunkt ist.

$\|(x,y)\|_3 = |x|+|y|$ ist eine Norm:

$$\|\lambda(x,y)\|_3 = \|(\lambda x,\lambda y)\|_3 = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|\,\big(|x|+|y|\big) = |\lambda|\,\|(x,y)\|_3\ ,$$

die Summe zweier Beträge ist nie negativ und verschwindet genau dann, wenn $x=y=0$ ist, und für $(u,v),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{aligned}\|(u,v)+(x,y)\|_3 &= \|(u+x,v+y)\|_3 = |u+x|+|v+y| \\ &\leq |u|+|x|+|v|+|y| = \|(u,v)\|_3 + \|(x,y)\|_3\ .\end{aligned}$$

$\|(x,y)\|_4 = \max(x,y)$ ist keine Norm, da z.B. $\|(-1,-2)\|_4 = -1$ negativ ist.

$\|(x,y)\|_5 = \max(2\,|x|\,,|3y|)$ ist wieder eine Norm, denn

$$\|\lambda(x,y)\|_5 = \|(\lambda x,\lambda y)\|_5 = \max\{2\,|\lambda x|\,,|3\lambda y|\} = |\lambda|\max\{2\,|x|\,,|3y|\} = |\lambda|\,\|(x,y)\|_5\ ,$$

das Maximum zweier Beträge ist nie negativ und verschwindet genau dann, wenn x und y beide verschwinden, und für $(u,v),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ schließlich ist

$$\begin{aligned}\|(u,v)+(x,y)\|_5 &= \|(u+x,v+y)\|_5 = \max\{2\,|u+x|\,,|3v+3y|\} \\ &\leq \max\{2(|u|+|x|),|3v|+|3y|\} = \|(u,v)\|_5 + \|(x,y)\|_5\ .\end{aligned}$$

$\|(x,y)\|_6 = \sqrt{|xy|}$ schließlich ist keine Norm, da beispielsweise $\|(1,0)\|_6$ verschwindet.

j) Zeigen Sie, daß die Normen unter diesen Abbildungen äquivalent zur Maximumsnorm sind!

Lösung: Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}$ ist

$$\max\{|x|\,,|y|\} \leq \|(x,y)\|_3 = |x|+|y| \leq 2\max\{|x|\,,|y|\} \quad \text{und}$$
$$\max\{|x|\,,|y|\} \leq \|(x,y)\|_5 = \max\{2\,|x|\,,|3y|\} \leq 3\max\{|x|\,,|y|\}\,.$$

k) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind offen, welche abgeschlossen?

$$M_1 = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| 0<x,y<2\big\}, \qquad M_2 = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| 0\leq x,y\leq 2\big\},$$
$$M_3 = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| 0<x,y\leq 2\big\},$$
$$M_4 = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| xy=0\big\}, \qquad M_5 = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| xy\neq 0\big\},$$

Lösung: Geometrisch betrachten sind M_1 bis M_3 Quadrate mit Ecken $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$ und $(2,0)$; im Falle von M_1 gehört keine der vier Kanten zur Menge, bei M_2 alle Kanten, und bei M_3 die Kanten von $(0,2)$ nach $(2,2)$ und $(2,0)$ nach $(2,2)$, wobei allerdings jeweils der erste Eckpunkt nicht in M_2 liegt.

M_1 ist offen, denn bezeichnet ε für einen Punkt $(x,y)\in M_1$ das Minimum der vier Zahlen $x,y,2-x$ und $2-y$, so liegt die offene Kreisscheibe mit Radius ε um (x,y) ganz in M_1. Da der Randpunkt $(0,0)$ nicht in M_1 liegt, ist M_1 jedoch nicht abgeschlossen.

M_2 ist nicht offen, da $(0,0) \in M_2$ kein innerer Punkt ist, aber abgeschlossen, da alle Randpunkte in M_2 liegen.

M_3 ist nicht offen, da $(2,2) \in M_3$ kein innerer Punkt ist, und nicht abgeschlossen, da der Randpunkt $(0,0)$ nicht in M_3 liegt.

M_4 ist abgeschlossen, denn offensichtlich sind die Randpunkte genau die Punkte von M_4. Da es keine inneren Punkte gibt, ist M_4 nicht offen.

M_5 ist offen, denn bezeichnet ε für $(x,y) \in M_5$ das Minimum der Beträge von x und y, so liegt die offene Kreisscheibe mit Radius ε um (x,y) ganz in M_5. Randpunkte von M_5 sind die Punkte aus dem Komplement M_4, also ist M_5 nicht abgeschlossen.

l) Zeigen Sie, daß die Vereinigung beliebig vieler offener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ wieder offen ist!

Lösung: I sei eine Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir müssen zeigen, daß auch $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ offen ist. Jeder Punkt $x \in U$ liegt in mindestens einem U_i und ist dort innerer Punkt; U_i enthält also für ein gewisses $\varepsilon > 0$ alle Punkte $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$. Damit liegen diese Punkte erst recht in U, also ist auch U offen.

m) Stellen Sie das offene Intervall $(0,\ 1)$ dar als Vereinigung abzählbar unendlich vieler abgeschlossener Intervalle!

Lösung: $(0,\ 1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [1/n,\ 1 - 1/n]$

n) Welche der Punkte $(0,0), (1,1), (2,2), (2,1), (2,0)$ aus $\mathbb{R}^2$ sind innere Punkte der Menge $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| \le 2\right\}$, welche sind äußere *bzw.* Randpunkte?

Lösung: M ist eine Raute mit Eckpunkten $(\pm 2, 0)$ und $(0, \pm 2)$. Daher ist $(0,0)$ ein innerer Punkt, denn der Kreis mit Radius eins um $(0,0)$ liegt ganz in M. Der Punkt $(1,1)$ liegt auf der Kante von $(0,2)$ nach $(2,0)$, ist also Randpunkt: Für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ ist $(1 - \varepsilon, 1) \in M$, aber $(1 + \varepsilon, 1) \notin M$.

$(2,2)$ ist ein äußerer Punkt: Der Kreis mit Radius eins um $(2,2)$ liegt vollständig außerhalb von M, entsprechend auch $(2,1)$, wo immerhin noch der Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ ganz außerhalb liegt. $(2,0)$ als Ecke schließlich ist Randpunkt: $(2 - \varepsilon, 0)$ liegt für kleine ε in M, $(2 + \varepsilon, 0)$ nicht.

o) Welche der hier definierten Folgen sind konvergent, und wohin konvergieren diese?

$$(u_n, v_n) = \left(\frac{1}{n^2+1}, \frac{2}{n^3-3}\right), \quad (x_n, y_n) = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right), \quad (w_n, z_n) = \left(e^{-n}, \cos(e^{-n^2})\right)$$

Lösung: Wenn wir mit der Maximumsnorm arbeiten, müssen wir einfach untersuchen, ob die Folgen in der ersten sowie der zweiten Komponente konvergieren. Mit dem, was wir aus der Analysis I wissen, ist das einfach zu entscheiden:

$$\lim_{n \to \infty} (u_n, v_n) = \left(\lim_{n \to \infty} u_n, \lim_{n \to \infty} v_n\right) = (0,0)$$

und

$$\lim_{n \to \infty} (w_n, z_n) = \left(\lim_{n \to \infty} w_n, \lim_{n \to \infty} z_n\right) = (0,1)\,.$$

Da die Folge der x_n unbestimmt divergiert, kann auch die Folge der Punkte (x_n, y_n) nicht konvergieren.