Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, C201

*23. Mai 2013*

# 12. Übungsblatt Analysis II

**Fragen:** *(je ein Punkt)*
*Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine* kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

*1)* Beschreiben Sie die Niveaulinien der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$ !

*2)* *Richtig oder falsch:* $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sei eine Abbildung, für die es eine rationale Zahl $c < 1$ gebe derart, daß $|f(x) - f(y)| \le c \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es ein $z \in \mathbb{Q}$ mit $f(z) = z$.

*3)* Die geographischen Koordinaten eines Punkts $P$ auf einer Kugel $K \subset \mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt $M = (0,0,0)$ sind die geographische Breite, d.h. der Winkel $\varphi$ zwischen der $(x,y)$-Ebene und der Geraden $MP$, sowie die geographische Länge, d.h. der Winkel $\lambda$ zwischen der $(x,z)$-Ebene und dem Strahl $MP$. Drücken Sie diese beiden Größen in Kugelkoordinaten aus!

*4)* *Richtig oder falsch:* Jede beschränkte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in \mathbb{R}^n$ konvergiert.

*5)* *Richtig oder falsch:* $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ seien Teilmengen mit endlichem Volumen. Dann ist $\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$.

**Aufgabe 1:** *(6 Punkte)*
$A \subset \mathbb{R}^3$ sei eine meßbare Menge, d.h. das Volumen $\mu(A)$ existiert. Zeigen Sie:

*a)* Für fast alle $z \in \mathbb{R}$ ist auch $A_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x,y,z) \in A\right\}$ meßbar.

*b)* Die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto \begin{cases} \mu(A_z) & \text{falls } A_z \text{ meßbar} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$ ist integrierbar.

*c)* (Prinzip von Cavalieri) Für $Z = \left\{z \in \mathbb{R} \;\middle|\; A_z \neq \emptyset\right\}$ gilt: $\mu(A) = \int_Z f(z)$

*d)* Berechnen Sie nach diesem Prinzip das Volumen des Sphäroids

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \le 1\right\} !$$

**Aufgabe 2:** *(4 Punkte)*
Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$, indem Sie das Problem über die Transformationsformel zurückführen auf das bekannte Volumen $\frac{4}{3}\pi$ der Kugel $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ !

**Aufgabe 3:** *(5 Punkte)*
Das $n$-dimensionale Standardsimplex ist die Menge

$$\Delta_n = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_k \ge 0 \text{ für alle } k \text{ und } \sum_{k=1}^n x_k = 1\right\}$$

Zeigen Sie, daß $\mu(S_n) = \frac{1}{n!}$ ist!

**Keine Abgabe – Semesterende**