

8. Mai 2013

10. Übungsblatt Analysis II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Die Niveaumengen der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ seien allesamt Mengen der Form $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = a\}$. Dann gibt es eine bijektive Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $f(x, y) = g(xy)$ ist.
- 2) *Richtig oder falsch:* $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine mindestens zweifach stetig differenzierbare Funktion, deren partielle Ableitungen $f_{xx}(x, y)$ und $f_{yy}(x, y)$ in allen Punkten verschwinden. Dann ist $f(x, y)$ eine lineare Funktion von xy .
- 3) *Richtig oder falsch:* $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine surjektive Funktion. Dann nimmt die Funktion $f(x, y) = e^{\sin g(x, y)}$ auf \mathbb{R}^2 sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an.
- 4) *Richtig oder falsch:* Das Oval $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1\}$ hat ein äußeres Maß $\mu^*(O) \leq 4$.
- 5) *Richtig oder falsch:* Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine konkave, so ist $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } f(x) \leq y \leq g(x)\}$ eine konvexe Menge.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Q sei das Quadrat mit Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 1)$.

- a) Entscheiden Sie, ohne die Integrale auszurechnen, ob $\int_Q xy^2 \leq \int_Q xy^2 e^{xy}$ ist!
- b) Berechnen Sie die beiden Integrale!

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom fünften Grades der Funktion

$$f(x, y) = 1 + x \sin(x + y) \cos y$$

um den Nullpunkt!

- b) Wie sieht das entsprechende Polynom um den Punkt $(0, \pi)$ aus?
Hinweis: Für die Beantwortung dieser Frage sind keine größeren Rechnungen nötig.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

- a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Funktion $f(x, y) = e^{x-y} \sin(x + 2y)$!
- b) Bestimmen Sie alle relativen und absoluten Extrema von f auf dem Quadrat mit Ecken $(\pm\pi, \pm\pi)$!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 15. Mai 2013, um 10.10 Uhr