WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

25. April 2013

9. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*

1) Richtig oder falsch: Die Menge alle reeller Zahlen der Form $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ist eine Nullmenge.

Lösung: *Richtig,* denn sie ist abzählbar: Wie wir wissen, ist $\mathbb{Q}$ abzählbar, also auch $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, und $(a, b) \mapsto a + b\sqrt{2}$ ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ auf die betrachtete Menge.

2) Richtig oder falsch: Die Folge der Funktionen $f_k(x) = \cos^k x$ konvergiert fast überall gegen die Nullfunktion.

Lösung: *Richtig:* Liegt x nicht in der Nullmenge $Z = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$, so ist $|\cos x| < 1$, die Folge der Potenzen $\cos^k x$ also eine Nullfolge.

3) Richtig oder falsch: Konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der stetigen Funktionen $f_k\colon D \to \mathbb{R}$ auf $D \subseteq \mathbb{R}$ fast überall gegen die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ und auch fast überall gegen $g\colon D \to \mathbb{R}$, so ist $f = g$.

Lösung: *Falsch:* Konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen f und ist $Z \subset D$ irgendeine Nullmenge, so konvergiert die Folge auch fast überall gegen die Funktion $g\colon D \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) + 1$ für $x \in Z$ und $g(x) = f(x)$ sonst.

Setzt man allerdings D als offen und f, g beide als stetig voraus, so wird die Behauptung *richtig:* Dann gibt es Nullmengen $Z_1, Z_2 \subset D$, so daß $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für alle $x \notin Z_1$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = g(x)$ für alle $x \notin Z_2$. Für jedes $x \in D$, das nicht in der Nullmenge $Z = Z_1 \cup Z_2$ liegt, ist also $f(x) = g(x)$. Für $x \in Z$ gibt es, da eine Nullmenge keine inneren Punkte hat, zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $x_i \in D \setminus Z$, so daß $\|x - x_i\| < \frac{1}{i}$ ist. Die Folge der x_i konvergiert gegen x und $f(x_i) = g(x_i)$ für alle i; wegen der Stetigkeit von f und g ist daher $f(x) = \lim\limits_{i\to\infty} f(x_i) = g(x)$.

4) Richtig oder falsch: Hat $A \subset \mathbb{R}^n$ keine inneren Punkte, so ist A eine Nullmenge.

Lösung: *Falsch:* Ist A etwa die Menge alle Punkte aus $\mathbb{R}^n$ mit irrationalen Koordinaten, so hat A keine inneren Punkte, denn in jeder Umgebung einer irrationalen Zahl liegen auch rationale Zahlen. Trotzdem ist A keine Nullmenge, denn jede Quaderüberdeckung von A muß ganz $\mathbb{R}^n$ überdecken.

Aufgabe 1: *(12 Punkte)*

Die Funktion $f_k\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ sei auf $[0, 1)$ definiert durch

$$f_k(x) = \begin{cases} x + \frac{x}{k} & \text{falls } 0 \le x \le \frac{k}{k+1} \\ (k+1)(1-x) & \text{falls } \frac{k}{k+1} < x < 1 \end{cases} ;$$

für $x \in [1, 10]$ sei $f_k(x) = f_k\big(x - [x]\big)$, wobei $[x]$ die größte natürliche Zahl kleiner oder gleich x bezeichnet, und für $x \notin [0, 10]$ sei $f_k(x) = 0$.

a) Zeigen Sie, daß alle f_k Funktionen mit kompaktem Träger sind!

Lösung: Zunächst ist f_k stetig auf $(0, 1)$, denn auf den Teilintervallen $(0, \frac{k}{k+1})$ und $(\frac{k}{k+1}, 1)$ ist f_k linear, also stetig, und im Punkt $x = \frac{k}{k+1}$ haben beide lineare Funktionen den Wert eins. Zu den Intervallenden hin gehen beide Funktionen gegen Null; somit bleibt die Funktion auch stetig bei der periodischen Fortsetzung auf das Intervall $[0, 10]$. Schließlich ist sie sogar stetig auf ganz R, denn kommt man aus dem Innern das Intervalls an einen der Randpunkte, erhält man den Grenzwert Null, und von außen natürlich erst recht.

Im offenen Intervall $(0, 1)$ ist $f_k(x) > 0$, also gilt dasselbe auch für alle nichtganzen Zahlen aus $[0, 10]$. Außerhalb dieses Intervalls verschwindet f_k; daher ist der Träger gleich dem abgeschlossenen Intervall $[0, 10]$, also kompakt, und wegen der Stetigkeit von f_k haben wir eine Funktion mit kompaktem Träger.

b) Geben Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, gegen die die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *punktweise* konvergiert!

Lösung: f_k steigt zwischen Null und $\frac{k}{k+1}$ von 0 auf 1 und fällt dann bis zur Eins wieder ab auf 0. Für $k \to \infty$ geht $\frac{k}{k+1}$ gegen eins; daher sollte $f_k(x)$ auf dem Intervall $[0, 1)$ gegen x konvergieren: Für jedes $x \in [0\,1)$ ist $x < \frac{k}{k+1}$ für alle $k > \frac{1}{1-x}$, also ist

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \left(x + \frac{x}{k}\right) = x\,.$$

An der Stelle $x = 1$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(1) = \lim\limits_{k\to\infty} 0 = 0$; somit ist

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} x - [x] & \text{falls } x \in [0, 10] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

c) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein CAUCHY-Folge bezüglich der L^1-Norm auf $K^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Lösung: Da die Funktionen auf dem Intervall $[0, 10]$ periodisch mit Periode eins sind, genügt es, die Integrale jeweils nur von 0 bis 1 zu berechnen; die L^1-Norm ist einfach der zehnfache Wert.

Für $k < \ell$ und $0 \le x \le \frac{k}{k+1}$ ist $f_k(x) \ge f_\ell(x)$, da f_k dort die größere Steigung hat; danach bleibt $f_k(x)$ noch größer, bis $f_k(x) = (k+1)(1-x) = x + \frac{x}{\ell}$ ist bei $x^* = \frac{(k+1)\ell}{(k+2)\ell+1}$. Dies ist für alle ℓ kleiner als $\frac{k+1}{k+2}$ und damit (wegen $k < \ell$) erst recht als $\frac{\ell}{\ell+1}$. Daher ist an diesem Punkt $f_\ell(x) = x + \frac{x}{\ell}$ und somit $f_\ell(x) \ge f_k(x)$. Insgesamt ist also

$$\int_0^1 |f_\ell(x) - f_k(x)| = \int_0^{k/(k+1)} \left(x + \frac{x}{k} - x - \frac{x}{\ell}\right) dx + \int_{k/(k+1)}^{(k+1)\ell/((k+2)\ell+1)} \left((k+1)(1-x) - x - \frac{x}{\ell}\right) dx$$
$$+ \int_{(k+1)\ell/((k+2)\ell+1)}^{\ell/(\ell+1)} \left(x + \frac{x}{\ell} - (k+1)(1-x)\right) dx + \int_{\ell/(\ell+1)}^{1} \left((\ell+1)(1-x) - (k+1)(1-x)\right) dx$$

Da alle Integranden linear sind, kann man das zumindest im Prinzip ohne größere Schwierigkeiten ausrechnen; schneller geht es aber, wenn wir geometrisch argumentieren: Das erste Integral ist die Fläche des Dreiecks mit Ecken $(0,0), (\frac{k}{k+1}, 1)$ und $(\frac{k}{k+1}, y_1)$, wobei

$$y_1 = f_\ell\left(\frac{k}{k+1}\right) = \frac{k}{k+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{\ell}\right) = \frac{k(\ell+1)}{(k+1)\ell}$$

ist. Der zweite Integrand ist das Dreieck mit Ecken $(\frac{k}{k+1}, 1), (\frac{k}{k+1}, y_1)$ und (x^*, y_2) mit

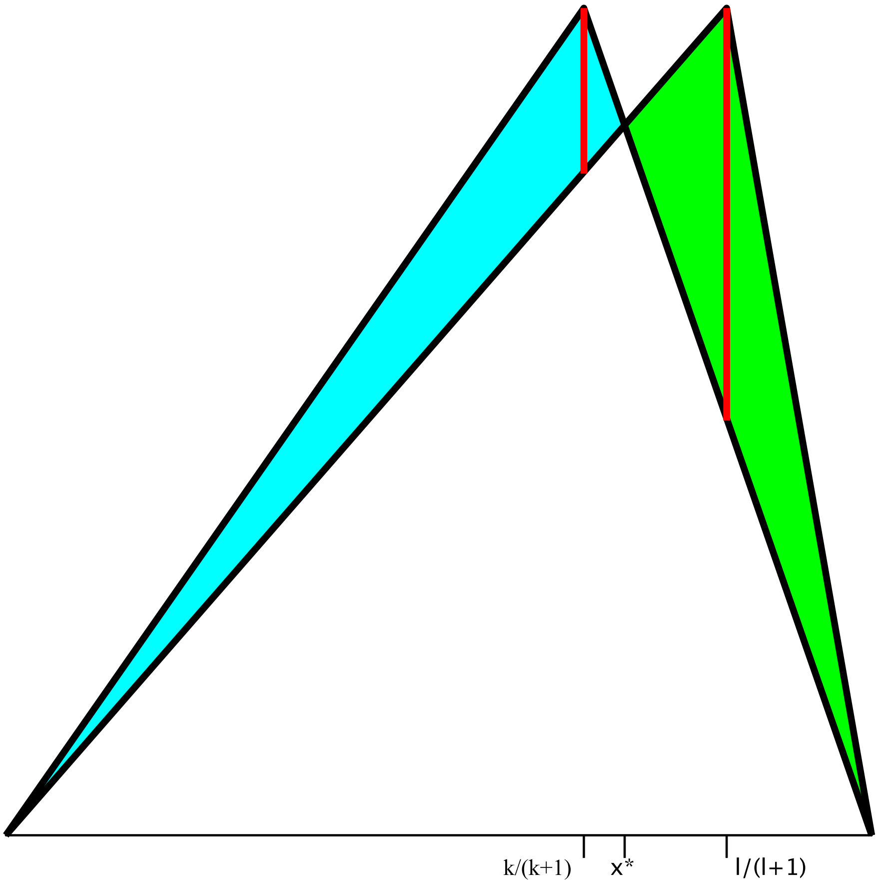
$$y_2 = f_\ell(x^*) = \frac{(k+1)\ell}{(k+2)\ell+1} \cdot \frac{\ell+1}{\ell} = \frac{(k+1)(\ell+1)}{(k+2)\ell+1}\,.$$

Für beide Dreiecke nehmen wir die gemeinsame Seite als Grundkante; sie hat die Länge

$$a_1 = 1 - y_1 = \frac{(k+1)\ell - k(\ell+1)}{(k+1)\ell} = \frac{\ell - k}{(k+1)\ell}\,.$$

Die Summe der Höhen der beiden Dreiecke ist $x^* < 1$, die Summe der Flächen also wegen unserer Voraussetzung $k < \ell$ kleiner als

$$\frac{a_1}{2} = \frac{\ell - k}{(k+1)\ell} < \frac{\ell}{(k+1)\ell} = \frac{1}{k}\,.$$



Beim dritten und vierten Integral können wir genauso vorgehen: Jetzt haben wir zwei Dreiecke mit Basis kleiner eins, und die Summe der Höhen ist

$$1 - x^* = 1 - \frac{(k+1)\ell}{(k+2)\ell+1} = \frac{(k+2)\ell + 1 - (k+1)\ell}{(k+2)\ell+1} = \frac{\ell+1}{(k+2)\ell+1} < \frac{k+1}{(k+2)k+1}\,.$$

Somit ist die $\|f_k - f_\ell\|_1$ kleiner als

$$\frac{1}{k} + \frac{k+1}{(k+2)k+1}\,.$$

Da dies für $k \to \infty$ gegen Null geht, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß dies für $k, \ell \geq N$ unter ε liegt, also haben wir eine CAUCHY-Folge bezüglich der L^1-Norm.

d) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein CAUCHY-Folge bezüglich der Supremumsnorm auf $K^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Lösung: An der Stelle $x = \frac{\ell}{\ell+1}$ ist, für $\ell > k$,

$$f_\ell(x) - f_k(x) = 1 - (k+1)(1-x) = 1 - \frac{k+1}{\ell+1} = \frac{\ell-k}{\ell+1}\,.$$

Wenn wir k festhalten und ℓ wachsen lassen, geht dies offensichtlich gegen eins; daher geht der Abstand zumindest an dieser Stelle nicht gegen Null, und damit gilt das gleiche für die Supremumsnorm von $f_\ell - f_k$.

e) Konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f?

Lösung: Nein, denn sonst müßte die Grenzfunktion stetig sein.
Wir können aber auch direkt die Definition anwenden: Falls die Folge gleichmäßig konvergieren würde, gäbe es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ wäre für alle $k \geq N$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Für $0 < \delta < \frac{1}{k+1}$ ist $f_k(1-\delta) = (k+1)\delta$ und $f(1-\delta) = 0$, also ist die Differenz gleich $(k+1)\delta$. Speziell für $\delta = \frac{1}{2k+2}$ ist das $\frac{1}{2}$; für $\varepsilon < \frac{1}{2}$ kann also die Ungleichung $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ unmöglich für alle x gelten.

f) Berechnen Sie das Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}} f$!

Lösung: Nach Definition des Lebesgue-Integrals $\int_{\mathbb{R}} f$ ist dies der Grenzwert der Integrale über die f_k. Das Integral über f_k ist einfach das entsprechende Riemann-Integral von 0 bis 10; geometrisch gesehen sind dies die Flächen von zehn Dreiecken mit Basis der Länge eins auf der x-Achse und mit Höhe eins. Der Fläche ist unabhängig von k für jedes dieser Dreiecke gleich $1/2$; daher ist $\int_{\mathbb{R}} f = \frac{10}{2} = 5$.

g) Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegen die $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall konvergiert?

Lösung: *Nein,* denn keine stetige Funktion kann die Sprünge bei $x = 1, 2, \dots, 10$ mit einer blosen Nullmenge kaschieren.

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*
Zeigen Sie:

a) Für eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist der Graph $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Nullmenge.

Lösung: Der Graph ist das Bild der Nullmenge $\mathbb{R} \times \{0\}$ unter der differenzierbaren Abbildung $(x, y) \mapsto \big(x, f(x)\big)$, also eine Nullmenge.

b) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so ist der Abschluß von $\mathbb{R}^n \setminus A$ der gesamte $\mathbb{R}^n$.

Lösung: *Richtig:* Da kein Punkt einer Nullmenge innerer Punkt ist, gibt es zu jedem $a \in A$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus a$ mit $\|x - a\| < \varepsilon$. Daher liegt a im Abschluß von $\mathbb{R}^n \setminus A$.