

25. April 2013

9. Übungsblatt Analysis II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Die Menge aller reeller Zahlen der Form $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ist eine Nullmenge.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_k(x) = \cos^k x$ konvergiert fast überall gegen die Nullfunktion.
- 3) *Richtig oder falsch:* Konvergiert die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ der stetigen Funktionen $f_k: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ fast überall gegen die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und auch fast überall gegen $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, so ist $f = g$.
- 4) *Richtig oder falsch:* Hat $A \subset \mathbb{R}^n$ keine inneren Punkte, so ist A eine Nullmenge.

Aufgabe 1: (12 Punkte)

Die Funktion $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ sei auf $[0, 1]$ definiert durch

$$f_k(x) = \begin{cases} x + \frac{x}{k} & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{k}{k+1} \\ (k+1)(1-x) & \text{falls } \frac{k}{k+1} < x < 1 \end{cases};$$

für $x \in [1, 10]$ sei $f_k(x) = f_k(x - [x])$, wobei $[x]$ die größte natürliche Zahl kleiner oder gleich x bezeichnet, und für $x \notin [0, 10]$ sei $f_k(x) = 0$.

- a) Zeigen Sie, daß alle f_k Funktionen mit kompaktem Träger sind!
- b) Geben Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, gegen die die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *punktweise* konvergiert!
- c) Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein CAUCHY-Folge bezüglich der L^1 -Norm auf $K^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
- d) Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein CAUCHY-Folge bezüglich der Supremumsnorm auf $K^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
- e) Konvergiert $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f ?
- f) Berechnen Sie das LEBESGUE-Integral $\int_{\mathbb{R}} f$!
- g) Gibt es eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gegen die $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ fast überall konvergiert?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Zeigen Sie:

- a) Für eine stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist der Graph $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Nullmenge.
- b) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so ist der Abschluß von $\mathbb{R}^n \setminus A$ der gesamte \mathbb{R}^n .

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 2. Mai 2013, um 10.10 Uhr