Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 2515

11. April 2013

7. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Finden Sie eine Iterationsvorschrift, die mit Hilfe des Newton-Verfahrens Näherungswerte für $\sqrt[n]{a}$ liefert! ($a \in \mathbb{R}$ positiv, $n \geq 2$).

2) *Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ konvergiert gleichmäßig gegen $\cos x$.

3) *Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ konvergiert auf jedem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig gegen $\sin x$.

4) *Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_n: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

5) *Richtig oder falsch:* $Q \subset \mathbb{R}^2$ sei das Quadrat mit Ecken $(\pm\pi, \pm\pi)$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann ist $\int_Q f(x) \sin y = 0$.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Die Funktionen $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien rekursiv definiert durch die Vorschriften $f_0(x) = 1$ und $f_n(x) = 1 - 3\int_0^x t^2 f_{n-1}(t)\, dt$ für $n \geq 1$. Was ist $f_3(x)$?

b) Drücken Sie $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ durch bekannte Funktionen aus!

c) Zeigen Sie, daß $f(x) = 1 - 3\int_0^x t^2 f(t)\, dt$ ist und $f'(x) = -3x^2 f(x)$!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^3 - 9x$!

b) Bestimmen Sie nun näherungsweise mit Hilfe des Newton-Verfahrens drei Lösungen der Gleichung $f(x) = 1$, indem Sie, ausgehend von den drei Nullstellen von f, jeweils drei Iterationsschritte durchführen!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Berechnen Sie $\int_Q y^2 e^{xy}$!

b) R sei das Rechteck mit Ecken $(0,0), (1,0), (1, \frac{\pi}{2})$ und $(0, \frac{\pi}{2})$. Berechnen Sie $\int_R xy^2 \sin xy$!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 17. April 2013, um 10.10 Uhr