Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

14. März 2013

5. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Der Durchschnitt zweier kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

2) Richtig oder falsch: Das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus X$ einer kompakten Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

3) Richtig oder falsch: f sei auf $D = \big\{x \in \mathbb{R}^n \bigm| \|x\| < 2\big\}$ differenzierbar, und ∇f sei dort nirgends gleich dem Nullvektor. Dann nimmt f sowohl sein Maximum als auch sein Minimum in $M = \big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \bigm| \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\big\}$ auf der Einheitssphäre $\big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \bigm| \|\boldsymbol{x}\| = 1\big\}$ an.

4) Richtig oder falsch: Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und $X \subset \mathbb{R}$ kompakt, so ist auch das Urbild $f^{-1}(X)$ kompakt.

5) Richtig oder falsch: Jede endliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

a) Welche der folgenden Mengen ist kompakt?

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 2\}, & B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |xy| \leq 1\}, \\ C &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 10\}, & D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^6 + z^8 \leq 100\} \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: Für jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ ist $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ kompakt!

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie das absolute Maximum und Minimum von $f(x,y) = 3x^4 + y^4$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 3y^2 \leq 7$!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 20. März 2013, um 10.10 Uhr