Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

14. Februar 2013

1. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Die Niveaulinien $N_a(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = a\}$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu den Funktionswerten $a \in \mathbb{R}$ seien die Geraden $y = a - x$. Was ist f?

2) Der Graph $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y) = z\}$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit Koordinaten x, y in $\mathbb{R}^2$ und z in $\mathbb{R}$ sei die Fläche, die aus der Parabel $z = 1 - x^2$ durch Rotation um die z-Achse entsteht. Was ist f?

3) *Richtig oder falsch:* Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, so auch $2\|\cdot\|$.

4) *Richtig oder falsch:* $\mathbb{R}^n$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen.

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

a) Beweisen Sie die Formel $\displaystyle\int x^n e^x \, dx = e^x \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} n!}{i!} x^i + C$ sowohl via partielle Integration als auch direkt!

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ sowohl mit Hilfe der Substitution $x = \sin u$ als auch mit der Substitution $x = \cos v$!

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*

a) Welche der Vorschriften $\|(x,y)\|_1 = \min\{|x|, |y|\}$ und $\|((x,y)\|_2 = \max\{|x+y|, |y|\}$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^2$?

b) Zeigen Sie, daß diese Norm äquivalent ist zur Maximumsnorm!

Aufgabe 8: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Der Durchschnitt zweier offener Mengen ist offen, der zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

b) Entscheiden Sie für jeden der drei Punkte $(4,4)$, $(5,5)$ und $(6,6)$, ob er innerer, äußerer oder Randpunkt der Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 100 \text{ und } 3 \le x \le 5\}$ ist!

c) Ist M offen oder abgeschlossen?

Aufgabe 9: *(3 Punkte)*
Welche der hier definierten Folgen in $\mathbb{R}^2$ sind konvergent, und wohin konvergieren sie?

a) $\displaystyle\left(\frac{2n+3}{3n-2}, \frac{3n-2}{2n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *b)* $\displaystyle\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n, (-1)^n n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *c)* $\displaystyle\left(e^{1-n^2}, 2 + \sin\frac{1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 20. Februar 2013, um 10.00 Uhr